Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado (PAEG)
Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II - Junio 2011 - Propuesta B

1. Queremos invertir una cantidad de dinero en dos tipos de acciones y queremos que: la cantidad invertida en las acciones de tipo A no puede superar los 10000 euros, la cantidad invertida en acciones de tipo B no puede superar los 12000 euros y la suma de las cantidades invertidas no pueden exceder de 15000 euros. El interés anual estimado por las acciones de tipo A es del 10 % y el ofrecido por las acciones de tipo B es del 11 %.

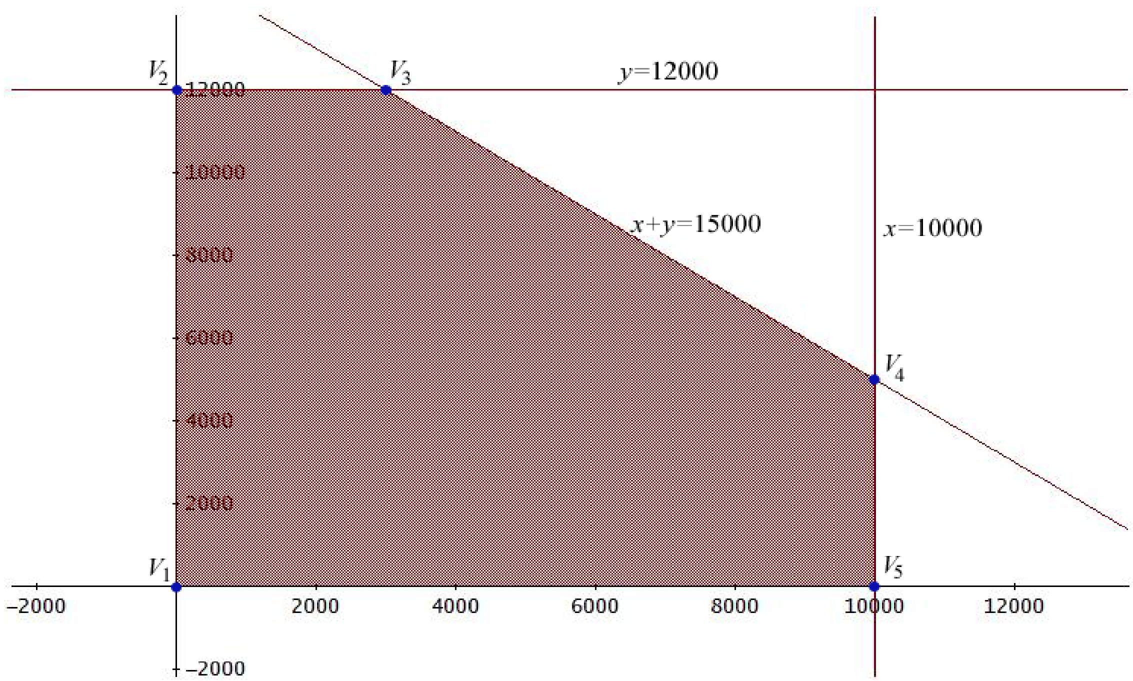
   a) Dibuja la región factible.

   b) Determina las cantidades que debe invertir en cada uno de los tipos para que el beneficio sea lo mayor posible.

   Solución: Llamemos x e y al dinero en euros invertido en las acciones de tipo A y B, respectivamente. El enunciado del problema fija las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} x \leqslant 10000 \\ y \leqslant 12000 \\ x + y \geqslant 15000 \end{cases}$$

   a) La región factible asociada a las restricciones anteriores es la siguiente:



b) Los vértices de la región factible responden a los puntos de corte de las rectas correspondientes (ver figura anterior). De este modo:

- El corte entre los dos ejes de coordenadas es $V_1 = (0, 0)$.
- El corte entre el eje Y y la recta $y = 12000$ es $V_2 = (0, 12000)$.
- El corte entre la recta $x + y = 15000$ y la recta $y = 12000$ es $V_3 = (3000, 12000)$.
- El corte entre la recta $x + y = 15000$ y la recta $x = 10000$ es $V_4 = (10000, 5000)$.
- El corte entre la recta $x = 10000$ y el eje X es $V_5 = (10000, 0)$.

El beneficio o rentabilidad de las acciones viene dado por la función $z = \frac{10}{100}x + \frac{11}{100} = 0{,}10x + 0{,}11y$. Dicho beneficio, en cada uno de los vértices, es el siguiente:

- El el vértice $V_1 = (0, 0)$: $z = 0{,}10 \cdot 0 + 0{,}11 \cdot 0 \Rightarrow z = 0$.
- El el vértice $V_2 = (0, 12000)$: $z = 0{,}10 \cdot 0 + 0{,}11 \cdot 12000 \Rightarrow z = 1320$.
- El el vértice $V_3 = (3000, 12000)$: $z = 0{,}10 \cdot 3000 + 0{,}11 \cdot 12000 \Rightarrow z = 1620$.
- El el vértice $V_4 = (10000, 5000)$: $z = 0{,}10 \cdot 10000 + 0{,}11 \cdot 5000 \Rightarrow z = 1550$.
- El el vértice $V_5 = (10000, 0)$: $z = 0{,}10 \cdot 10000 + 0{,}11 \cdot 0 \Rightarrow z = 1000$.

Por tanto la solución óptima se encuentra en el vértice $V_3 = (3000, 12000)$, es decir, el mayor beneficio (1620 euros) se obtiene si se invierten 3000 euros en acciones del tipo A y 12000 euros en acciones del tipo B.

2. Al 50 % del total de los alumnos de una clase les gusta sólo el fútbol, al 20 % del total les gusta sólo el baloncesto y el resto, que son 6 alumnos, no les gustan estos deportes. Se pide:

   a) Plantea un sistema de ecuaciones que responda a las condiciones del enunciado.

   b) Calcula el total de alumnos y el número de los aficionados al fútbol y al baloncesto.

   Solución:

   a) Llamemos x, y al número de alumnos que les gusta sólo el fútbol y sólo el baloncesto, respectivamente. Llamemos también z al número total de alumnos. Los datos que se dan en el enunciado del problema se pueden plantear mediante el siguiente sistema de ecuaciones:

   $$\begin{cases} x + y + 6 = z \\ \dfrac{50}{100}z = x \\ \dfrac{20}{100}z = y \end{cases}$$

   b) El sistema anterior es de muy fácil resolución, pues basta sustituir las dos últimas ecuaciones en la primera:

   $$\frac{50}{100}z + \frac{20}{100}z + 6 = z \Leftrightarrow 50z + 20z + 600 = 100z \Leftrightarrow 30z = 600 \Leftrightarrow z = 20$$

   Sustituyendo este valor en la segunda y tercera ecuaciones:

   $$x = \frac{50}{100}z = \frac{50}{100}20 = 10 \quad ; \quad y = \frac{20}{100}20 = 4$$

   Por tanto hay 10 alumnos que les gusta sólo el fútbol y 4 alumnos que les gusta sólo el baloncesto. Además, en la clase hay un total de 20 alumnos.

3. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 6x - 8 & \text{si} \quad x \leqslant -2 \\ 0 & \text{si} \quad -2 < x \leqslant 2 \\ x^2 - 6x + 8 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$. Se pide:

   a) Límites laterales de la función f en el punto $x = -2$.

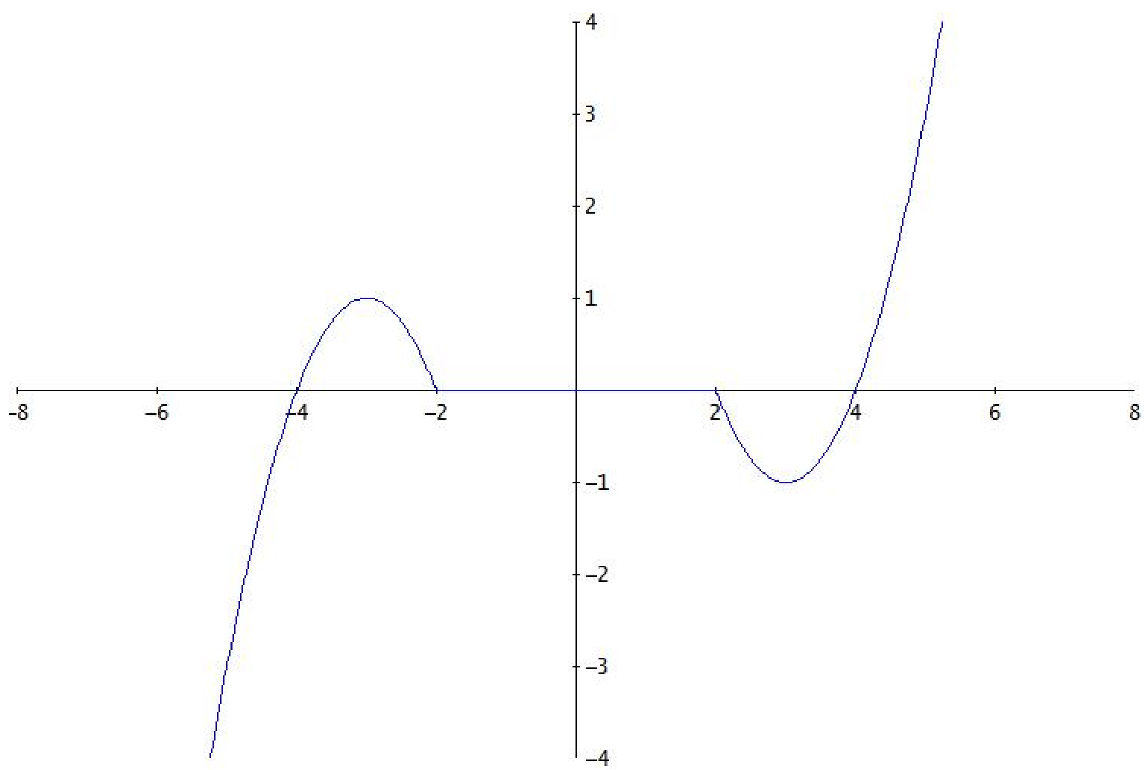
   b) Representación gráfica de la función f.

Solución:

a) Por la izquierda de -2 $(x < -2)$ la función es $f(x) = -x^2 - 6x - 8$, y por la derecha de -2 $(x > -2)$ la función es constantemente igual a 0. Por tanto los límites laterales de la función f en el punto $x = -2$ son:

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} (-x^2 - 6x - 8) = -(-2)^2 - 6(-2) - 8 = -4 + 12 - 8 = 0$$
$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} 0 = 0$$

b) Representación gráfica de la función f:



4. La temperatura T, en grados centígrados, de una reacción química viene dada en función del tiempo t, en horas, por la expresión $T(t) = 10t(3-t)$, en donde $0 \leqslant t \leqslant 3$. Se pide:

    a) Temperatura que habría a los 30 minutos de comenzada la reacción.

    b) ¿En qué momento se alcanza la máxima temperatura y cuál es ésta?

    Solución:

    a) Como la función viene dada en función del tiempo, medido en horas, debemos pasar los 30 minutos a horas. Es decir, $t = 0{,}5$ (30 minutos son media hora). De este modo:

    $$T(0{,}5) = 10 \cdot 0{,}5 \cdot (3 - 0{,}5) = 5 \cdot 2{,}5 = 12{,}5$$

    Por tanto, la temperatura que habría a los 30 minutos de comenzada la reacción, sería de 12.5 grados centígrados.

    b) La función se puede escribir así: $T(t) = 30t - 10t^2$, cuya derivada es $T'(t) = 30 - 20t$ Los puntos donde la función puede alcanzar sus máximos o mínimos relativos se encuentran en los puntos que anulan la derivada:

    $$T'(t) = 0 \Leftrightarrow 30 - 20t = 0 \Leftrightarrow 30 = 20t \Leftrightarrow t = \frac{30}{20} = 1{,}5$$

    Además:

    $$T''(t) = -20 \Rightarrow T''(1{,}5) = -20 < 0$$

    Por tanto $t = 1{,}5$ es un máximo relativo de la función. En concreto, el máximo relativo es el punto $(1{,}5\ ,\ T(1{,}5)) = (1{,}5\ ,\ 22{,}5)$
    De lo anterior se deduce que pasada una hora y media se alcanza la máxima temperatura, que será de 22,5 grados centígrados.
    En los extremos del intervalo donde está definida la función no se alcanza la temperatura máxima pues $T(0) = 0$ y $T(3) = 0$.
    Esto quiere decir que la reacción química se inicia a 0 grados centígrados, alcanza su máxima temperatura pasada hora y media (22.5 grados) y se va enfriando hasta volver a los 0 grados pasadas 3 horas de iniciada la reacción química.

    Nota: no habría hecho falta haber hecho uso de las derivadas, ya que sabemos que la gráfica de la función $T(t) = 30t - 10t^2$ es una parábola que se abre "hacia abajo", con lo que su vértice sería el máximo de la función:

    $$t = -\frac{b}{2a} = -\frac{30}{2(-10)} = -\frac{30}{-20} = 1{,}5$$

5. Según un estudio, el 40 % de los hogares europeos tienen contratado acceso a Internet, el 33 % tiene contratada televisión por cable, y el 20 % disponen de ambos servicios.

   a) Si elegimos un hogar al azar y tiene televisión por cable, ¿cuál es la probabilidad de que tenga acceso a internet?

   b) Se selecciona un hogar europeo al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga contratado ninguno de los dos servicios?

   Solución:
   Llamemos I al suceso "elegido un hogar europeo al azar, que tenga contratado acceso a Internet" y C al suceso "elegido un hogar europeo al azar, que tenga contratada televisión por cable". El enunciado del problema proporciona las siguientes probabilidades:

$$P(I) = 0{,}4 \quad ; \quad P(C) = 0{,}33 \quad ; \quad P(I \cap C) = 0{,}2$$

   a) Se pide la probabilidad del suceso I, condicionado por el suceso C:

$$P(I/C) = \frac{P(I \cap C)}{P(C)} = \frac{0{,}2}{0{,}33} = 0{,}606$$

   b) Se pide la probabilidad del suceso $\overline{I} \cap \overline{C}$. Para hallarla haremos uso de una de las leyes de Morgan:

$$\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$$

   También haremos uso de la conocidas fórmulas de la probabilidad del suceso contrario de un suceso y de la unión de dos sucesos:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

   Entonces:

$$P(\overline{I} \cap \overline{C}) = P(\overline{I \cup C}) = 1 - P(I \cup C) = 1 - (P(I) + P(C) - P(I \cap C)) =$$

$$= 1 - (0{,}4 + 0{,}33 - 0{,}2) = 1 - 0{,}53 = 0{,}47$$

6. Se ha extraído una muestra de 10 familias de residentes en un barrio obteniéndose los siguientes datos: 19987, 20096, 19951, 20263, 20014, 20027, 20023, 19942, 20078, 20069. Se supone que la renta familiar de los residentes en el barrio sigue una distribución normal de desviación típica 150 euros.

   a) Encontrar el intervalo de confianza al 95 % para la renta familiar media.

   b) Interpretar el significado del intervalo obtenido.

   c) ¿Crees que sería válido el intervalo de confianza obtenido, si la muestra se hubiera elegido entre las familias con más ingresos del barrio? Razona tu respuesta.

z	**0.00**	**0.01**	**0.02**	**0.03**	**0.04**	**0.05**	**0.06**	**0.07**	**0.08**	**0.09**
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

Solución:
Según el enunciado, el tamaño de la muestra es $n = 10$, y la desviación típica es $\sigma = 150$. Por otro lado, con los datos proporcionados, tenemos que la media de la muestra dada es

$$\overline{x} = \frac{19987 + 20096 + 19951 + 20263 + 20014 + 20027 + 20023 + 19942 + 20078 + 20069}{10} = 20045$$

a) El intervalo de confianza para la renta familiar media viene dado por

$$\left(\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

El valor crítico $z_{\alpha/2}$ es aquel que cumple, sobre la distribución normal estándar, que

$$P\left(Z \leqslant z_{\alpha/2}\right) \leqslant 1 - \frac{\alpha}{2}$$

A un nivel de confianza del 95 % se tiene que:

$$1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow \alpha = 1 - 0{,}95 \Rightarrow \alpha = 0{,}05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0{,}025 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}975$$

Entonces hemos de buscar en la tabla de la distribución normal estándar, un valor $z_{\alpha/2}$ tal que $P\left(Z \leqslant z_{\alpha/2}\right) \leqslant 0{,}975$. Esto se cumple exactamente para $z_{\alpha/2} = 1{,}96$. Así pues, el intervalo de confianza para la renta familiar media es:

$$\left(20045 - 1{,}96\frac{150}{\sqrt{10}},\ 20045 + 1{,}96\frac{150}{\sqrt{10}}\right) = (20045 - 92{,}97,\ 20045 + 92{,}97) =$$

$$= (19952{,}03,\ 20137{,}97)$$

b) Si llamamos μ a la renta familiar media de todas las familias residentes en el barrio, el intervalo anterior viene a decir que la probabilidad de que dicha media se encuentre entre 19952,03 euros y 20137,97 euros es 0.95 (el nivel de confianza es del 95 %):

$$P(19952{,}03 \leqslant \mu \leqslant 20137{,}97) = 0{,}95$$

Dicho de otra manera, si escogemos 100 familias que residan en ese barrio, es prácticamente seguro que 95 de ellas tienen una renta familiar entre 19952.03 y 20137.97 euros.

c) El intervalo no sería válido ya que no se trataría de una muestra aleatoria. La muestra seleccionada deber ser representativa de la población estudiada, ya que si no, las conclusiones obtenidas en el estudio no serán fiables.
En general, para que los resultados obtenidos a partir de una muestra sean fiables deben cumplir dos condiciones fundamentales:

- Tener un tamaño adecuado.
- Que sus elementos hayan sido seleccionados de manera aleatoria.

Si se cumplen estas dos condiciones, diremos que la muestra es representativa de la población y la estimación mediante un intervalo de confianza será válida. En el caso de que la selección no sea aleatoria, como es el caso si la muestra se hubiera elegido entre las familias con más ingresos del barrio, los resultados no son válidos y se dice que la muestra es sesgada.