Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado (PAEG)

Matemáticas II – Septiembre 2012 – Propuesta B

PROPUESTA B. EJERCICIO 1

Enunciado:

Dada la función

$$f(x)=\frac{ax^2+b}{2x+6}$$

calcula los parámetros $a,\, b\in\mathbb{R}$ sabiendo que:

- $f(x)$ tiene una asíntota oblicua de pendiente 2.
- $f(x)$ tiene un mínimo relativo en el punto de abscisa $x=0$.

Solución:

Como la pendiente de la asíntota oblicua es $m=2$. Entonces:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=2\Leftrightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{ax^2+b}{2x+6}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+b}{2x^2+6x}=2\Leftrightarrow\frac{a}{2}=2\Leftrightarrow a=4.$$

De este modo, la función queda de la forma $f(x)=\dfrac{4x^2+b}{2x+6}$.

Al ser $x=0$ un mínimo relativo se tiene que $f'(0)=0$. La derivada de f es:

$$f'(x)=\frac{8x(2x+6)-(4x^2+b)2}{(2x+6)^2}=\frac{16x^2+48x-8x^2-2b}{(2x+6)^2}=\frac{8x^2+48x-2b}{(2x+6)^2}.$$

Entonces $f'(0)=0\Leftrightarrow\dfrac{8\cdot0+48\cdot0-2b}{(2\cdot0+6)^2}=0\Leftrightarrow\dfrac{-2b}{36}=0\Leftrightarrow-2b=0\Leftrightarrow b=0$.

Resumiendo: si $a=4$, $b=0$, la función $f(x)=\dfrac{4x^2}{2x+6}$ tiene una asíntota oblicua de pendiente 2 y un mínimo relativo en el punto de abscisa $x=0$.

PROPUESTA B. EJERCICIO 2

Enunciado:

Calcula el área encerrada entre las gráficas de las funciones $f(x)=x^3-3x^2+2x+1$ y $g(x)=1$.

Solución:

Calculemos los puntos donde se cortan ambas gráficas:

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow x^3-3x^2+2x+1=1\Leftrightarrow x^3-3x^2+2x=0\Leftrightarrow x(x^2-3x+2)=0\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\x^2-3x+2=0\end{cases}$$

Las soluciones de la ecuación de segundo grado $x^2-3x+2=0$ son $x=1$, $x=2$. Por tanto los puntos en los que ambas funciones se cortan tienen abscisas $x=0$, $x=1$, $x=2$.

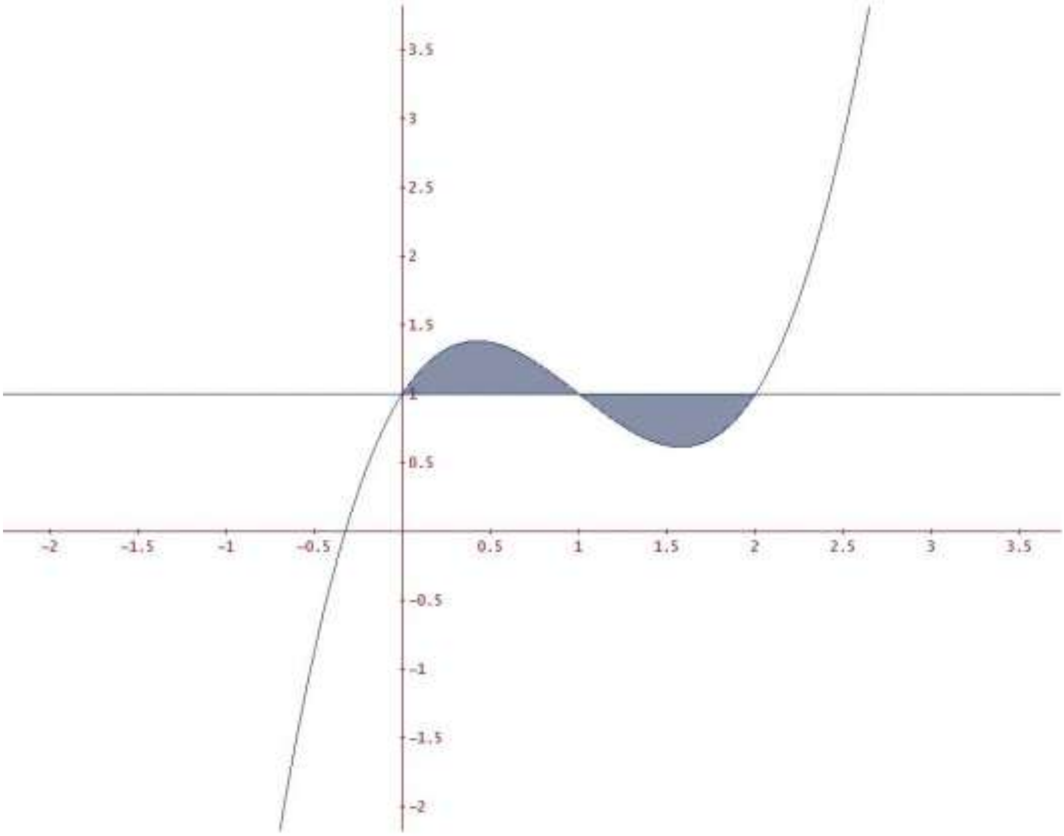
Estudiemos ahora el signo de $f(x)-g(x)$ para saber en qué momentos está una gráfica "por encima" o "por debajo" de la otra: $f(x)-g(x)=x^3-3x^2+2x+1-1=x^3-3x^2+2x=x(x-1)(x-2)$. Entonces:

Intervalo	$(-\infty,\, 0)$	$(0,\, 1)$	$(1,\, 2)$	$(2,\, +\infty)$
Signo de $f(x)-g(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

Los intervalos que nos interesan son $(0,\, 1)$ y $(1,\, 2)$ pues ambos extremos contienen a los puntos de corte de las funciones. Es decir:

- Si $x\in(0,\, 1)\Rightarrow f(x)-g(x)>0\Rightarrow f(x)>g(x)$
- Si $x\in(1,\, 2)\Rightarrow f(x)-g(x)<0\Rightarrow f(x)<g(x)$

Observa que es así en la siguiente figura, donde se representan tanto la función f como la función g:



De este modo, el área A encerrada entre las gráficas de ambas funciones, es la suma de otras dos A_1 y A_2, donde:

$$A_1=\int_0^1\left(f(x)-g(x)\right)dx=\int_0^1\left(x^3-3x^2+2x\right)dx=\left[\frac{x^4}{4}-x^3+x^2\right]_0^1=\frac{1}{4}-1+1=\frac{1}{4}$$

$$A_2=\int_1^2\left(g(x)-f(x)\right)dx=\int_1^2\left(-x^3+3x^2-2x\right)dx=\left[-\frac{x^4}{4}+x^3-x^2\right]_1^2=(-4+8-4)-\left(-\frac{1}{4}+1-1\right)=\frac{1}{4}$$

Por tanto, finalmente, $A=A_1+A_2=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}=0{,}5\text{ uds}^2$.

PROPUESTA B. EJERCICIO 3

Enunciado:

a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ ax \quad\; - 3z = a \\ 2x + ay - z = a \end{cases}$$

b) Resolverlo para el valor de $a = 1$.

Solución:

a) La matriz de los coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ a & 0 & -3 \\ 2 & a & -1 \end{pmatrix}$, cuyo rango es al menos dos pues el menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}$ es distinto de cero. Además $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ a & 0 & -3 \\ 2 & a & -1 \end{vmatrix} = \left(0 - 6 + 2a^2\right) - \left(0 - a - 3a\right) = 2a^2 + 4a - 6$. Entonces $|A| = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2a^2 + 4a - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = -3 \\ a_2 = 1 \end{cases}$. De este modo concluimos que $\text{rango}(A) = \begin{cases} 2 \text{ si } a = -3 \text{ o } a = 1 \\ 3 \text{ si } a \neq -3 \text{ y } a \neq 1 \end{cases}$. La matriz ampliada es $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ a & 0 & -3 & a \\ 2 & a & -1 & a \end{pmatrix}$, cuyo rango no puede ser mayor que 3. Además ya hemos visto que si $a \neq -3$ y $a \neq 1$, $\text{rango}(A) = 3$, con lo que podemos concluir que:

- Si $a \neq -3$ y $a \neq 1$, $\text{rango}(A) = \text{rango}(B) = 3 =$ número de incógnitas, con lo que el sistema es compatible determinado (solución única).

Estudiemos ahora lo que ocurre si $a = -3$ o $a = -1$.

- Si $a = -3$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & -3 & -3 \\ 2 & -3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$, que tiene al menos un menor de orden tres distinto de cero:

  $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -3 \\ -3 & -1 & -3 \end{vmatrix} = (9 + 18 + 0) - (0 + 0 + 3) = 21.$$

  Así pues, en este caso, $\text{rango}(A) = 2 \neq \text{rango}(B) = 3$, y el sistema es incompatible (no tiene solución).

- Si $a = 1$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, cuyo rango es 2, pues la última fila es suma de las dos primeras (se puede demostrar también comprobando que todos los menores de orden tres son cero).

  Por tanto, en este caso $\text{rango}(A) = \text{rango}(B) = 2 < 3 =$ número de incógnitas, con lo que el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones) y su grado de libertad es $g = 3 - 2 = 1$.

b) Para $a=1$, podemos eliminar la última ecuación (ya que depende linealmente de la primera y la segunda tal y como se ha visto en el apartado anterior), con lo que el sistema quedará de la forma: $\begin{cases} x+y+2z=0 \\ x \quad\; -3z=1 \end{cases}$.

Llamando $z=\lambda$, se tiene que $\begin{cases} x+y=-2\lambda \\ x=1+3\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-1-3\lambda-2\lambda \\ x=1+3\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-1-5\lambda \\ x=1+3\lambda \end{cases}$.

Entonces, para $a=1$, las infinitas soluciones dependen del parámetro λ y son $\begin{cases} x=1+3\lambda \\ y=-1-5\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$.

Obsérvese que estas soluciones están sobre una recta. De hecho son las ecuaciones paramétricas de una recta que pasa por el punto $P(1,\,-1,\,0)$ y tiene vector director $\vec{u}=(3,\,-5,\,1)$.

PROPUESTA B. EJERCICIO 4

Enunciado:

Dado el punto $P(1,\,0,\,0)$ y la recta $r\equiv\begin{cases} x=2\lambda \\ y=3+\lambda \\ z=-1 \end{cases}$, $\lambda\in\mathbb{R}$

a) Da unas ecuaciones paramétricas de la recta s que pasa por P y corta perpendicularmente a r.
b) Calcula la distancia de P a r.

Solución:

a) Calculemos el plano π que contiene a P y es perpendicular a r (véase la figura de la página siguiente).

Un vector director de r es $\vec{u}=(2,\,1,\,0)$. Este vector ha de ser perpendicular (normal) al plano π, con lo que su ecuación debe ser de la forma $\pi\equiv 2x+y+D=0$. Como este plano contiene a P tenemos, sustituyendo, que $2\cdot1+0+D=0\Rightarrow D=-2$. Así, la ecuación del plano π que contiene a P y es perpendicular a r es

$$\pi\equiv 2x+y-2=0$$

La intersección de este plano con la recta r será un punto: $\pi\cap r=M$. Hallémoslo:

M debe ser de la forma $M(2\lambda,\,3+\lambda,\,-1)$ ya que pertenece a r. Además, como $M\in\pi$, se deduce que $2\cdot2\lambda+3+\lambda-2=0\Rightarrow 5\lambda=-1\Rightarrow\lambda=-\frac{1}{5}$. Por tanto el punto es $M\left(-\frac{2}{5},\,\frac{14}{5},\,-1\right)$. Como $\pi\perp r$, la recta s que pasa por M y P (puntos contenidos en π) también será perpendicular a r. Un vector director de s es $\overrightarrow{MP}\left(1-\left(-\frac{2}{5}\right),\,0-\frac{14}{5},0-(-1)\right)=\overrightarrow{MP}\left(\frac{7}{5},\,-\frac{14}{5},1\right)$. Podemos tomar también como vector director uno proporcional, por ejemplo, $\vec{v}=(7,\,-14,\,5)$. Así, las ecuaciones paramétricas de la recta s son:

$$s\equiv\begin{cases} x=1+7\lambda \\ y=-14\lambda \\ z=5\lambda \end{cases},\ \lambda\in\mathbb{R}$$

b) Como r y s se cortan perpendicularmente en M, la distancia de P a r, $d(P,\,r)$ coincide con la distancia de P a M, $d(P,\,M)$. Es decir:

$$d(P,\ r)=d(P,\ M)=\left|\overrightarrow{MP}\right|=\sqrt{\left(\frac{7}{5}\right)^2+\left(-\frac{14}{5}\right)^2+1^2}=\sqrt{\frac{49}{25}+\frac{196}{25}+1}=\sqrt{\frac{270}{25}}=\sqrt{\frac{54}{5}}\cong 3,286\,\text{uds}$$