Evaluación para Acceso a la Universidad

Matemáticas II (Universidad de Castilla-La Mancha) – junio 2019 – Propuesta B

EJERCICIO 1

Enunciado:

Calcula razonadamente los siguientes límites: **(1,25 puntos por límite)**.

a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2e^{x-1}}{x+1}\right)^{\frac{x}{x-1}}$

b) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{-e^{x^2-1}-x}{x^2+4x+3}$

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2e^{x-1}}{x+1}\right)^{\frac{x}{x-1}}=\left(\dfrac{2}{2}\right)^{\frac{1}{0}}=\left[\text{Indeterminación } 1^{\infty}\right]=(*)$

Llamemos $f(x)=\dfrac{2e^{x-1}}{x+1}$ y $g(x)=\dfrac{x}{x-1}$. Entonces, si $g(x)\left(f(x)-1\right)\to L\Rightarrow f(x)^{g(x)}\to e^{L}$

$$\lim_{x\to 1}\left[g(x)\left(f(x)-1\right)\right]=\lim_{x\to 1}\left[\frac{x}{x-1}\cdot\left(\frac{2e^{x-1}}{x+1}-1\right)\right]=\lim_{x\to 1}\left[\frac{x}{x-1}\cdot\frac{2e^{x-1}-x-1}{x+1}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{2xe^{x-1}-x^2-x}{x^2-1}=$$

$$=\left[\text{Indeterminación } \frac{0}{0}\right]\overset{\text{L'Hôpital}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{2e^{x-1}+2xe^{x-1}-2x-1}{2x}=\frac{2+2-2-1}{2}=\frac{1}{2}.$$

Por tanto: $(*)=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2e^{x-1}}{x+1}\right)^{\frac{x}{x-1}}=e^{\frac{1}{2}}$.

b) $$\lim_{x\to -1}\frac{-e^{x^2-1}-x}{x^2+4x+3}=\frac{-e^{0}-(-1)}{1-4+3}=\left[\text{Indeterminación } \frac{0}{0}\right]\overset{\text{L'Hôpital}}{=}\lim_{x\to -1}\frac{-2xe^{x^2-1}-1}{2x+4}=\frac{-2(-1)e^{0}-1}{-2+4}=\frac{2-1}{2}=\frac{1}{2}.$$

EJERCICIO 2

Enunciado:

Dadas las funciones $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ y $g(x)=\dfrac{x^2}{2}$ con $x\in\mathbb{R}$.

a) Encuentra razonadamente las coordenadas de los extremos relativos de las funciones $f(x)$ y $g(x)$. **(1 punto)**

b) Calcula razonadamente el área del recinto cerrado limitado por las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$. **(1,5 puntos)**

Solución:

a) $f'(x)=\dfrac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2}$. Entonces $f'(x)=0\Leftrightarrow 2x=0\Leftrightarrow x=0$.

$$f''(x)=\frac{-2\left(1+x^2\right)^2-(-2x)2\left(1+x^2\right)2x}{\left(1+x^2\right)^4}=\frac{-2\left(1+x^2\right)+8x^2}{\left(1+x^2\right)^3}=\frac{6x^2-2}{\left(1+x^2\right)^3}.$$

Como $f''(0)=\frac{-2}{1}=-2<0$, tenemos que $x=0$ es un máximo. Concretamente, el punto $(0,f(0))=(0,1)$.

$g'(x)=x$. Entonces $g'(x)=0\Leftrightarrow x=0$.

$g''(x)=1>0$ para todo $x\in\mathbb{R}$. Entonces $x=0$ es un mínimo. Concretamente, el punto $(0,g(0))=(0,0)$

b) Calculemos en primer lugar las abscisas de los puntos en los que se cortan las gráficas de $f(x)$ y de $g(x)$:

$$f(x)=g(x)\Rightarrow\frac{1}{1+x^2}=\frac{x^2}{2}\Rightarrow 2=x^2+x^4\Rightarrow x^4+x^2-2=0\Rightarrow\begin{cases}x=-1\\x=1\end{cases}$$

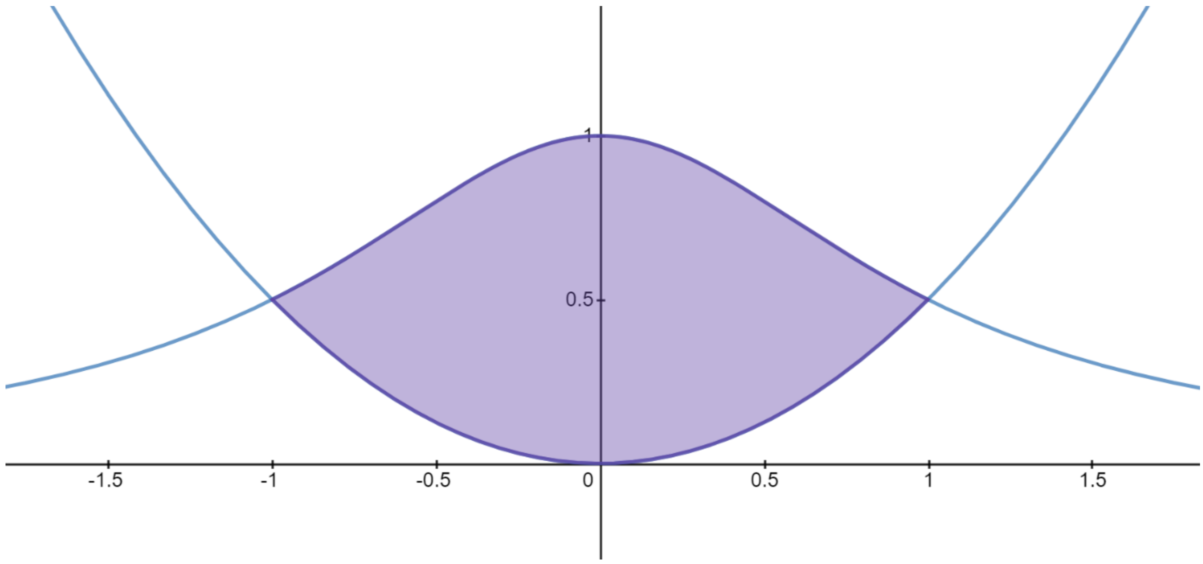
Además, entre $x=-1$ y $x=1$ es $f(x)\geq g(x)$ pues ambas funciones son continuas y en $x=0$ f tiene un máximo y g tiene un mínimo. Por tanto, el área A del recinto cerrado limitado por las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ viene dada por (ver figura al final del ejercicio):

$$A=\int_{-1}^{1}\left(f(x)-g(x)\right)dx=\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{x^2}{2}\right)dx=\int_{-1}^{1}\frac{2-x^2\left(1+x^2\right)}{2\left(1+x^2\right)}dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{-x^4-x^2+2}{x^2+1}dx.$$

Calculemos la integral indefinida $\int\frac{-x^4-x^2+2}{x^2+1}dx$. Se trata de una integral racional. Como el grado del numerador es mayor que el grado del denominador, efectuamos la división, obteniendo como cociente el polinomio $-x^2$ y de resto 2. Por tanto: $-x^4-x^2+2=-x^2\left(x^2+1\right)+2\Rightarrow\frac{-x^4-x^2+2}{x^2+1}=-x^2+\frac{2}{x^2+1}$. Así:

$$\frac{1}{2}\int\frac{-x^4-x^2+2}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int\left(-x^2+\frac{2}{x^2+1}\right)dx=\frac{1}{2}\left(-\frac{x^3}{3}+2\operatorname{arctg}x+C\right)=-\frac{x^3}{6}+\operatorname{arctg}x+D.$$ Y entonces:

$$A=\left[-\frac{x^3}{6}+\operatorname{arctg}x\right]_{-1}^{1}=\left(-\frac{1}{6}+\operatorname{arctg}1\right)-\left(\frac{1}{6}+\operatorname{arctg}(-1)\right)=\left(-\frac{1}{6}+\frac{\pi}{4}\right)-\left(\frac{1}{6}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2\pi}{4}-\frac{2}{6}=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}\cong 1,24\text{ u}^2.$$



EJERCICIO 3

Enunciado:

Dadas matrices

$$A=\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\-1&1&0\\2&-1&0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&2&2\\0&1&1\\1&-1&2\end{pmatrix}\text{ y } C=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&0\\0&1&2\end{pmatrix}$$

a) Calcula razonadamente la matriz inversa de A. **(1 punto)**

b) Calcula razonadamente la matriz X que verifica que $AX-2B=C$. **(1,5 puntos)**

Solución:

a) $|A|=(0+0-1)-(-2+0+0)=-1+2=1$. Como $|A|\neq 0$, existe la inversa, que es $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\left(A^d\right)^t$ donde $\left(A^d\right)^t$ denota la matriz traspuesta de la matriz adjunta de A. Hallemos pues la matriz adjunta de A.

$$A^d=\begin{pmatrix}0&0&-1\\1&2&-3\\1&1&-2\end{pmatrix}$$. Entonces, finalmente: $$A^{-1}=\frac{1}{1}\begin{pmatrix}0&1&1\\0&2&1\\-1&-3&-2\end{pmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&2&1\\-1&-3&-2\end{pmatrix}.$$

b) $AX-2B=C\Rightarrow AX=C+2B\Rightarrow A^{-1}AX=A^{-1}(C+2B)\Rightarrow X=A^{-1}(C+2B)$. Por tanto:

$$X=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&2&1\\-1&-3&-2\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&0\\0&1&2\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1&2&2\\0&1&1\\1&-1&2\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&2&1\\-1&-3&-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&5&5\\1&3&2\\2&-1&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2&8\\4&5&10\\-9&-12&-23\end{pmatrix}.$$

EJERCICIO 4

Enunciado:

Sean la recta $r\equiv\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{2}$, el punto $P(3,1,-1)$ y el plano $\pi\equiv 2x+y-z=0$

a) Calcula la distancia del punto P a la recta r. **(1,25 puntos)**

b) Encuentra razonadamente las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto P y por el punto Q, siendo Q el punto de corte de la recta r y el plano paralelo a π que contiene a P. **(1,25 puntos)**

Solución:

a) En general, si $r\equiv\dfrac{x-a_1}{u_1}=\dfrac{y-a_2}{u_2}=\dfrac{z-a_3}{u_3}$ y $P(p_1,p_2,p_3)$, entonces la distancia de P a r viene dada por:

$$d(P,r)=\frac{\left|(p_1-a_1,p_2-a_2,p_3-a_3)\times(u_1,u_2,u_3)\right|}{\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}}$$

Calculemos primero el producto vectorial:

$$(3-1,1-0,-1-(-1))\times(3,1,2)=(2,1,0)\times(3,1,2)=\begin{vmatrix}i&j&k\\2&1&0\\3&1&2\end{vmatrix}=(2i+2k)-(3k+4j)=2i-4j-k$$

Entonces:

$$d(P,r)=\frac{\sqrt{2^2+(-4)^2+(-1)^2}}{\sqrt{3^2+1^2+2^2}}=\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{12}}=\frac{\sqrt{21}}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{63}}{6}=\frac{3\sqrt{7}}{6}=\frac{\sqrt{7}}{2}\text{ uds.}$$

b) Un plano paralelo a π es siempre de la forma $2x+y-z+D=0$. Si este plano paralelo ha de contener al punto $P(3,1,-1)$, entonces $2\cdot 3+1-(-1)+D=0\Rightarrow 8+D=0\Rightarrow D=-8$. Por tanto el plano paralelo a π que contiene a P es $\pi'\equiv 2x+y-z-8=0$.

Por otro lado, las ecuaciones paramétricas de la recta r son $\begin{cases} x=1+3\lambda \\ y=\lambda \\ z=-1+2\lambda \end{cases}$. Sustituyendo en la ecuación del plano

π', $2(1+3\lambda)+\lambda-(-1+2\lambda)-8=0\Rightarrow 2+6\lambda+\lambda+1-2\lambda-8=0\Rightarrow 5\lambda=-5\Rightarrow\lambda=-1$.

De aquí deducimos que el punto Q de corte de la recta r y el plano paralelo a π que contiene a P es $Q(1+3(-1),-1,-1+2(-1))=Q(-2,-1,-3)$.

Lo que se pide es la recta que pasa por P y Q, la cual daremos en forma continua:

$$\frac{x-3}{-2-3}=\frac{y-1}{-1-1}=\frac{z+1}{-3-(-1)}\Rightarrow\frac{x-3}{-5}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+1}{-2}$$

EJERCICIO 5

Enunciado:

a) Una alarma de seguridad tiene instalados dos sensores. Ante una emergencia los sensores se activan de forma independiente. La probabilidad de que se active el primer sensor es de $0,98$ y de que se active el segundo es de $0,96$. Calcula razonadamente la probabilidad de que ante una emergencia:

a1) Se active al menos uno de los dos sensores. **(0,75 puntos)**

a2) Se active sólo uno de los sensores. **(0,5 puntos)**

b) El tiempo, en horas, empleado en realizar cierta intervención quirúrgica sigue una distribución normal $N(10,2)$. Calcular razonadamente el porcentaje de estas intervenciones que se pueden realizar:

b1) Entre $6,5$ y 13 horas. **(0,75 puntos)**

b2) En menos de siete horas. **(0,5 puntos)**

a	**0,00**	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**	**0,07**	**0,08**	**0,09**
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767

Solución:

a) Llamemos A y B a los sucesos "que ante una emergencia se active el sensor A" y "que ante una emergencia se active el sensor B", respectivamente. Entonces $P(A)=0,98$ y $P(B)=0,96$.

Como ante una emergencia los sensores se activan de forma independiente, la probabilidad de la intersección de los sucesos es igual al producto de sus probabilidades: $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)=0,98\cdot 0,96=0,9408$.

a1) La probabilidad de que se active al menos uno de los dos sensores es igual a la probabilidad de que se active uno, de que se active el otro o de que se activen ambos, es decir, igual a la probabilidad de la unión de ambos sucesos:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0,98+0,96-0,9408=0,9992 .$$

a2) La probabilidad de que se active sólo uno de los sensores es la de que se active el sensor A pero no el B, o bien la de que se active el sensor B pero no el A. Como los sucesos $A-B$ y $B-A$ son disjuntos la probabilidad de la unión de ambos es igual a la suma de las probabilidades:

$$P((A-B)\cup(B-A))=P(A-B)+P(B-A)=P(A)-P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B)=$$
$$=0,98-0,9408+0,96-0,9408=0,0584 .$$

b) Llamemos X a la variable "tiempo, en horas, empleado en realizar cierta intervención quirúrgica". Según el enunciado X se distribuye según una normal $N(10,2)$. Por tanto, la variable tipificada $Z=\dfrac{X-10}{2}$ se distribuye según una normal de media 0 y desviación 1 (distribución normal estándar), cuyas probabilidades $P(Z\leq a)$ podemos mirar en la tabla adjunta.

b1) La probabilidad de que el tiempo de espera se encuentre entre $6,5$ y 13 horas viene dada por:

$$P(6,5\leq X\leq 13)=P(X\leq 13)-P(X\leq 6,5)=P\left(Z\leq\frac{13-10}{2}\right)-P\left(Z\leq\frac{6,5-10}{2}\right)=$$
$$=P(Z\leq 1,5)-P(Z\leq -1,75)=P(Z\leq 1,5)-(1-P(Z\leq 1,75))=0,9332-(1-0,9599)=0,8931 .$$

Por tanto, el porcentaje de estas intervenciones que se pueden realizar entre $6,5$ y 13 horas es del $89,31\%$

b2) La probabilidad de que el tiempo de espera sea menor de siete horas es:

$$P(X\leq 7)=P\left(Z\leq\frac{7-10}{2}\right)=P(Z\leq -1,5)=1-P(Z\leq 1,5)=1-0,9332=0,0668 .$$

Por tanto, solo el $6,68\%$ de las intervenciones se pueden realizar en menos de siete horas.