UCLM - Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado (PAEG)

Matemáticas II – Junio 2012 – Propuesta B

PROPUESTA B. EJERCICIO 1

Enunciado:

La concentración (en %) de nitrógeno de un compuesto viene dada, en función del tiempo, $t \in [0, +\infty)$ medido en segundos, por la función

$$N(t) = \frac{60}{1+2e^{-t}}$$

a) Comprueba que la concentración de nitrógeno crece con el tiempo. ¿Para qué $t \in [0, +\infty)$ la concentración de nitrógeno es mínima y cuál es esta concentración?

b) ¿A qué valor tiende la concentración de nitrógeno cuando el tiempo tiende a infinito?

Solución:

a) $N'(t) = \frac{-60}{\left(1+2e^{-t}\right)^2} \cdot -2e^{-t} = \frac{120e^{-t}}{\left(1+2e^{-t}\right)^2} = \frac{\frac{120}{e^t}}{\left(1+\frac{2}{e^t}\right)^2} = \frac{\frac{120}{e^t}}{\frac{\left(e^t+2\right)^2}{e^{2t}}} = \frac{120e^t}{\left(e^t+2\right)^2}$.

Como la función exponencial es positiva ($e^x > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$) está claro que $N'(t) > 0,\ \forall t \in [0, +\infty)$ y, por tanto, la concentración de nitrógeno crece con el tiempo. Como $N'(t)$ no se anula nunca N no tiene extremos relativos. Su valor mínimo, absoluto además, ha de estar pues en cero (instante inicial) y en este momento la concentración es $N(0) = \frac{60}{1+2e^0} = \frac{60}{1+2} = 20\,\%$.

Para el razonamiento anterior no es necesario simplificar tanto la derivada. Basta con quedarse en

$N'(t) = \frac{-60}{\left(1+2e^{-t}\right)^2} \cdot -2e^{-t} = \frac{120e^{-t}}{\left(1+2e^{-t}\right)^2}$.

b) Al ser $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-t} = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{1}{e^t} = 0$, se tiene que $\lim\limits_{t\to+\infty} N(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{60}{1+2e^{-t}} = 60\%$.

PROPUESTA B. EJERCICIO 2

Enunciado:

Calcula las siguientes integrales: $\int \frac{1}{4+9x^2}\,dx$, $\int \left(\tan x + \frac{1}{\tan x}\right)dx$.

Solución:

- $$\int \frac{1}{4+9x^2}dx=\int \frac{\frac{1}{4}}{1+\frac{9}{4}x^2}dx=\frac{1}{4}\int \frac{1}{1+\left(\frac{3}{2}x\right)^2}dx=\frac{1}{4}\frac{2}{3}\int \frac{\frac{3}{2}}{1+\left(\frac{3}{2}x\right)^2}dx=\frac{1}{6}\arctan\left(\frac{3}{2}x\right)+C\,.$$
- $$\int\left(\tan x+\frac{1}{\tan x}\right)dx=\int\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right)dx=-\ln(\cos x)+\ln(\operatorname{sen} x)+C=\ln\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}+C\,.$$

PROPUESTA B. EJERCICIO 3

Enunciado:

a) Sean A y B matrices cuadradas de orden $n\in\mathbb{N},\ n\geq 2$, tales que B es la inversa de A:

- Si $|A|=3$, razona cuánto vale $|B|$.
- ¿Cuál es el rango de B?

b) Calcula el determinante de la matriz cuadrada X de orden 3 que verifica

$$\begin{pmatrix}1&-2&3\\0&10&-3\\0&7&0\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&7\end{pmatrix}$$

Solución:

a) El determinante del producto es el producto de los determinantes: $|AB|=|A||B|$. Entonces, en el caso particular de que B sea la inversa de A se tiene $AB=I\Rightarrow|AB|=|I|=1\Rightarrow|A||B|=1\Rightarrow|B|=\dfrac{1}{|A|}$. Es fácil por tanto deducir que si $|A|=3$, entonces $|B|=\dfrac{1}{3}$.

Por ser A cuadrada de orden $n\in\mathbb{N},\ n\geq 2$ y con determinante distinto de cero, su rango es n. El rango de su inversa B es el mismo, n, por la misma razón argumentada anteriormente.

b) Llamemos $C=\begin{pmatrix}1&-2&8\\0&10&-3\\0&7&0\end{pmatrix}$ y $D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&7\end{pmatrix}$. Por un lado $|C|=21$, luego C tiene inversa:

$$C^{-1}=\frac{1}{21}\left(C^d\right)^t=\frac{1}{21}\begin{pmatrix}21&0&0\\56&0&-7\\-74&3&10\end{pmatrix}^t=\frac{1}{21}\begin{pmatrix}21&56&-74\\0&0&3\\0&-7&10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&8/3&-74/21\\0&0&1/7\\0&-1/3&10/21\end{pmatrix}.$$

Así pues $X=C^{-1}\cdot D=\begin{pmatrix}1&8/3&-74/21\\0&0&1/7\\0&-1/3&10/21\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&8&-74/3\\0&0&1\\0&-1&10/3\end{pmatrix}.$

Entonces $|X|=\begin{vmatrix}1 & 8 & -74/3\\0 & 0 & 1\\0 & -1 & 10/3\end{vmatrix}=(0+0+0)-(0+0-1)=1$.

Sin embargo, es mucho más sencillo y se tarda mucho menos si se aplica la propiedad del apartado a), pues así nos evitamos el cálculo de inversas: $|C|=\begin{vmatrix}1 & -2 & 8\\0 & 10 & -3\\0 & 7 & 0\end{vmatrix}=21$; $|D|=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 3 & 0\\0 & 0 & 7\end{vmatrix}=21$.

Ahora, como $C\cdot X=D$, entonces $|C\cdot X|=|D|\Rightarrow|C|\cdot|X|=|D|\Rightarrow 21\cdot|X|=21\Rightarrow|X|=1$.

PROPUESTA B. EJERCICIO 4

Enunciado:

Dados el plano $\pi\equiv 2x-z=6$ y la recta $r\equiv\begin{cases}y+z=0\\x-y+az=4\end{cases}$

a) Encuentra el valor del parámetro $a\in\mathbb{R}$ para que π y r sean paralelos.

b) Para el valor de a del apartado anterior, da la ecuación general del plano π' que contiene a r y es perpendicular a π.

Solución:

a) Sin π y r han de ser paralelos el sistema $\begin{cases}2x-z=6\\y+z=0\\x-y+az=4\end{cases}$ no puede tener soluciones, es decir, el rango de la matriz A de los coeficientes no puede ser tres (en ese caso habría solución única y el plano y la recta se cortarían). Por tanto su determinante ha de ser igual a cero:

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & 0 & -1\\0 & 1 & 1\\1 & -1 & a\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow 2a-(-1-2)=0\Leftrightarrow 2a+3=0\Leftrightarrow a=-\frac{3}{2}$$

El rango de la matriz ampliada B es tres pues

$$\begin{vmatrix}2 & 0 & 6\\0 & 1 & 0\\1 & -1 & 4\end{vmatrix}=8-6=2$$

De este modo si $a=-\frac{3}{2}$, $rango(A)=2\neq 3=rango(B)$ (sistema incompatible) y en este caso la recta y el plano son paralelos.

b) Para $a=-\frac{3}{2}$ la recta es $r\equiv\begin{cases}y+z=0\\x-y+\frac{3}{2}z=4\end{cases}\Leftrightarrow r\equiv\begin{cases}y+z=0\\2x-2y+3z=8\end{cases}$, que en paramétricas es $\begin{cases}x=4+\frac{1}{2}\lambda\\y=-\lambda\\z=\lambda\end{cases}$

De las ecuaciones anteriores se deduce que un punto de r es $P(4,\,0,\,0)$ y un vector director suyo es $\vec{u}=(1,\,-2,\,2)$. El plano π' que se pide pasa por P y una de sus direcciones es la de $\vec{u}$ ya que contiene a r. Además, por ser perpendicular a π, otra de sus direcciones será la de un vector normal a π, o sea, $\vec{v}=(2,\,0,\,-1)$. Por tanto, la ecuación general del plano π' es:

$$\pi'\equiv\begin{vmatrix} x-4 & y & z \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow \pi'\equiv(2x-8+2y)-(-4z-y)=0 \Leftrightarrow \pi'\equiv 2x+3y+4z-8=0\,.$$