Evaluación para Acceso a la Universidad

Matemáticas II (Universidad de Castilla-La Mancha) – junio 2019 – Propuesta A

EJERCICIO 1

Enunciado:

a) Determina el valor de a y de b para que la siguiente función $f(x)$ sea derivable en todo $\mathbb{R}$.

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+2 & \text{si} \quad x\le 1 \\ a\sqrt{x}-\dfrac{b}{x^2} & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

(1,5 puntos)

b) Comprueba si la función $f(x)=x^2-4$ verifica las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[-3,3]$. **(1 punto)**

Solución:

a) Para que f sea continua en todo $\mathbb{R}$ ha de ser continua en $x=1$ (en el resto de puntos es continua por tratarse de funciones elementales, las cuales son continuas en su dominio de definición).

La condición para que f sea continua en $x=1$ es que exista el límite de la función en $x=1$ y coincida con la imagen de la función en dicho punto. Y para que exista el límite en $x=1$ deben existir los límites laterales y ser iguales. Es decir:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(ax^2+bx+2\right)=a+b+2=f(1) \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(a\sqrt{x}-\dfrac{b}{x^2}\right)=a-b \end{array}\right\} \Rightarrow a+b+2=a-b \Rightarrow 2b=-2 \Rightarrow b=-1$$

La función derivada de f, exceptuando el punto $x=1$, es la siguiente:

$$f'(x)=\begin{cases} 2ax+b & \text{si} \quad x<1 \\ \dfrac{a}{2\sqrt{x}}+\dfrac{2b}{x^3} & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

Para que exista la derivada en $x=1$ deben existir las derivadas laterales en dicho punto y ser iguales:

$$f'_-(1)=f'_+(1) \Rightarrow 2a+b=\frac{a}{2}+2b \Rightarrow 2a-\frac{a}{2}=b \Rightarrow \frac{3a}{2}=-1 \Rightarrow a=-\frac{2}{3}.$$

Resumiendo, para que $f(x)$ sea derivable en todo $\mathbb{R}$ debe ser $a=-\dfrac{2}{3}$ y $b=-1$.

b) El enunciado del teorema de Rolle es el siguiente.

"Sea f una función continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ y derivable en el abierto (a,b). Si $f(a)=f(b)$, existe algún punto $c\in(a,b)$ tal que $f'(c)=0$".

La función $f(x)=x^2-4$ es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$ por ser polinómica, en particular será continua en $[-3,3]$ y derivable en $(-3,3)$. Además $f(-3)=5=f(3)$. Entonces se verifican todas las hipótesis del teorema de Rolle, con lo que debe existir $c\in(-3,3)$ tal que $f'(c)=0$.

De hecho, como $f'(x)=2x$, tal punto c será: $2c=0 \Rightarrow c=0$.

EJERCICIO 2

Enunciado:

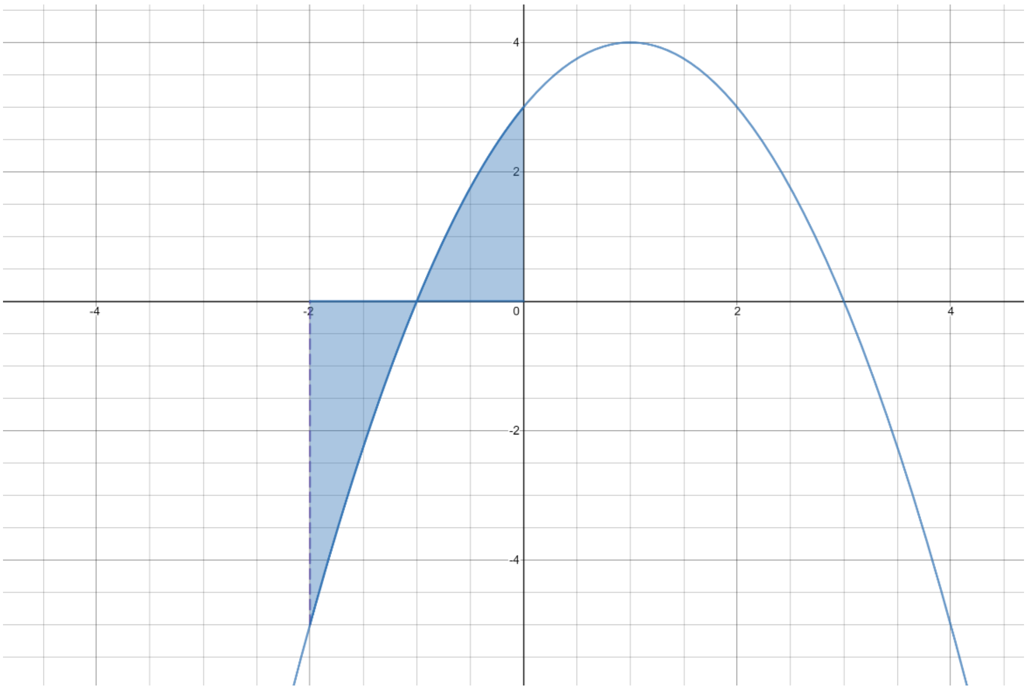
a) Calcula razonadamente el área de los recintos limitados por la función $g(x)=-x^2+2x+3$, la recta $x=-2$ y el eje de abscisas. **(1,5 puntos)**

b) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta normal a la gráfica de la función $g(x)$ en el punto de abscisa $x=4$. **(1 punto)**

Solución:

a) Veamos, en primer lugar, los puntos en los que la parábola corta al eje X: $-x^2+2x+3=0\Rightarrow\begin{cases}x=-1\\x=3\end{cases}$.

Entonces, el área A del recinto será: $A=\left|\int_{-2}^{-1}\left(-x^2+2x+3\right)dx\right|+\left|\int_{-1}^{0}\left(-x^2+2x+3\right)dx\right|$ (ver figura):



Hagamos las dos integrales definidas por separado:

- $\int_{-2}^{-1}\left(-x^2+2x+3\right)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+x^2+3x\right]_{-2}^{-1}=\left(\frac{1}{3}+1-3\right)-\left(\frac{8}{3}+4-6\right)=-\frac{7}{3}$ (el signo menos indica que el área queda por debajo del eje X).
- $\int_{-1}^{0}\left(-x^2+2x+3\right)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+x^2+3x\right]_{-1}^{0}=0-\left(\frac{1}{3}+1-3\right)=\frac{5}{3}$

Por tanto: $A=\left|\int_{-2}^{-1}\left(-x^2+2x+3\right)dx\right|+\left|\int_{-1}^{0}\left(-x^2+2x+3\right)dx\right|=\left|-\frac{7}{3}\right|+\left|\frac{5}{3}\right|=\frac{7}{3}+\frac{5}{3}=\frac{12}{3}=4$ u².

b) La ecuación de la recta normal a la gráfica de $g(x)$ en el punto $x=4$ es $y-g(4)=-\frac{1}{g'(4)}(x-4)$.

$g(4)=-4^2+2\cdot 4+3=-16+8+3=-5$, y como $g'(x)=-2x+2$, entonces $g'(4)=-2\cdot 4+2=-6$. Por tanto, la recta normal a la gráfica de $g(x)$ en $x=4$ es $y+5=\frac{1}{6}(x-4)$.

EJERCICIO 3

Enunciado:

a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} ax+2y \quad = a^2 \\ -x+y+z = 5 \\ x-ay-z = -(4+a) \end{array}\right\}$$

(1,5 puntos)

b) Resuélvelo razonadamente para el valor $a=1$. **(1 punto)**

Solución:

a) La matriz de los coeficientes es $A=\begin{pmatrix} a & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -a & -1 \end{pmatrix}$, cuyo rango es al menos dos pues contiene un menor de orden dos distinto de cero: $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2-0=2\neq 0$. Además, $|A|=(-a+2)-(2-a^2)=a^2-a$, de donde deducimos que $|A|=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=1 \end{cases}$. Ahora podemos hacer las siguientes consideraciones según los valores del parámetro a:

- Si $a\neq 0$ y $a\neq 1$ el determinante de la matriz A es distinto de cero, con lo que $rg(A)=3=rg(B)=n$, donde B denota la matriz ampliada y n el número de incógnitas del sistema. En este caso el sistema es compatible determinado (solución única).
- Si $a=0$ la matriz ampliada es $B=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & -1 & -4 \end{pmatrix}$. Orlando con el menor $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2-0=2\neq 0$, tenemos que $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -4 \end{vmatrix} = -8-(-10)=2\neq 0$. Por tanto, en este caso $rg(A)=2\neq rg(A')=3$, con lo que el sistema es incompatible (no tiene soluciones).
- Si $a=1$ la matriz ampliada es $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & -5 \end{pmatrix}$, cuyo rango no puede ser tres porque la tercera fila es la opuesta de la segunda. Por tanto, en este caso $rg(A)=2=rg(B)<3=n$, con lo que el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones), de grado de libertad $3-2=1$ (una incógnita libre).

b) Para $a=1$ hemos visto que el sistema tiene infinitas soluciones. Para hallarlas vamos a eliminar la tercera ecuación y vamos a llamar $z=\lambda$ (el grado de libertad es uno, es decir, una incógnita va libre): $\begin{cases} x+2y=1 \\ -x+y=5-\lambda \end{cases}$.

Sumando ambas ecuaciones se tiene que $3y=6-\lambda \Rightarrow y=\dfrac{6-\lambda}{3}$. Sustituyendo este valor en la primera ecuación tenemos que $x+2\left(\dfrac{6-\lambda}{3}\right)=1 \Rightarrow x=1-\dfrac{12-2\lambda}{3} \Rightarrow x=\dfrac{-9+2\lambda}{3}$.

EJERCICIO 4

Enunciado:

Dados los puntos $A(1,2,0)$, $B(0,-1,2)$, $C(2,-1,3)$ y $D(1,0,1)$:

a) Encuentra razonadamente la ecuación general del plano que contiene a la recta que pasa por A y por B y es paralelo a la recta que pasa por C y D. **(1,25 puntos)**

b) Calcula razonadamente el volumen del tetraedro cuyos vértices son los puntos A, B, C y D. **(1,25 puntos)**

Solución:

a)

b)

EJERCICIO 5

Enunciado:

a) Una fábrica A produce el 30 % de los tractores que se demandan en una Comunidad Autónoma, una fábrica B produce el 20 % y la fábrica C el resto. El controlador de calidad sabe que son defectuosos el 4 % de los tractores fabricados por A, el 10 % de los fabricados por B y el 2 % de los fabricados por C. Elegido un tractor al azar, calcula razonadamente la probabilidad de:

a1) No salga defectuoso. **(0,75 puntos)**

a2) Si resultó ser defectuoso, que no fuera fabricado por C. **(0,5 puntos)**

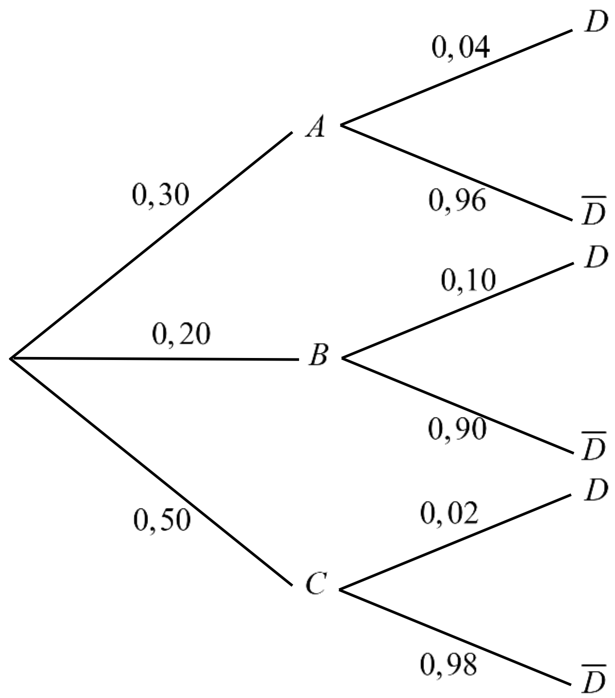
b) En una clase hay 16 chicas y 4 chicos. Cada día elijo a un estudiante al azar para que salga a la pizarra. Calcula razonadamente la probabilidad de que los cinco días laborables de la semana salgan a la pizarra:

b1) Tres chicas. **(0,75 puntos)**

b2) Al menos tres chicos. **(0,5 puntos)**

Solución:

a) Sean A, B y C los sucesos "elegido un tractor al azar, es producido en la fábrica A, B o C", respectivamente. Entonces, según el enunciado, $P(A)=0,30$, $P(B)=0,20$ y $P(C)=0,50$.



Llamemos ahora D al suceso “el tractor elegido es defectuoso”. Entonces, según el enunciado, tenemos las siguientes probabilidades condicionadas: $P(D/A)=0,04$, $P(D/B)=0,10$, $P(D/C)=0,02$. Todo lo anterior se puede resumir en el diagrama de la página anterior ($\overline{D}$ es el suceso “el tractor elegido no es defectuoso”).

Usando el teorema de la probabilidad total tenemos que la probabilidad de que un tractor no salga defectuoso es:

$$P(\overline{D})=P(\vec{D}\cap A)+P(\overline{D}\cap B)+P(\overline{D}\cap C)=P(A)\cdot P(\overline{D}/A)+P(B)\cdot P(\overline{D}/B)+P(C)\cdot P(\overline{D}/C)=$$

$$=0,30\cdot 0,96+0,20\cdot 0,90+0,50\cdot 0,98=0,288+0,18+0,49=0,958.$$

Si resultó ser defectuoso, la probabilidad de que no fuera fabricado por C viene dada por la siguiente probabilidad condicionada (teorema de Bayes):

$$P(\overline{C}/D)=\frac{P(\overline{C}\cap D)}{P(D)}=\frac{P(D-C)}{P(D)}=\frac{P(D)-P(D\cap C)}{P(D)}=\frac{P(D)-P(C)\cdot P(D/C)}{P(D)}=$$

$$=\frac{1-P(\overline{D})-P(C)\cdot P(D/C)}{1-P(\overline{D})}=\frac{1-0,958-0,50\cdot 0,02}{1-0,958}=\frac{0,042-0,01}{0,042}=\frac{0,032}{0,042}=0,762.$$

También se podría haber hecho teniendo en cuenta que si no fuera fabricado por C, tendría que haber sido fabricado por A o por B, es decir, calculando la suma de probabilidades siguiente:

$$P(A/D)+P(B/D)=\frac{P(A\cap D)}{P(D)}+\frac{P(B\cap D)}{P(D)}=\frac{0,30\cdot 0,04+0,20\cdot 0,10}{0,042}=\frac{0,012+0,02}{0,042}=\frac{0,032}{0,042}=0,762.$$

b) Para calcular las probabilidades que se piden supondremos que se trata de un experimento binomial. Solo se pueden dar dos posibilidades: o elijo a un chico o elijo a una chica. Tomaremos como éxito elegir a un chico. Entonces $p=4/20=0,2$. Además $n=5$, pues elijo al azar un chico o una chica los cinco días laborables de la semana. Tenemos pues que la variable X número de éxitos (número chicos elegidos los cinco días) sigue una distribución binomial $B(n,p)=B(5,\ 0,2)$. En general se tiene que

$$P(X=r)=\binom{n}{r}p^r(1-p)^{n-r}$$

La probabilidad de que salgan a la pizarra exactamente tres chicas es la misma que la de que salgan exactamente dos chicos, es decir:

$$P(X=2)=\binom{5}{2}0,2^2\cdot 0,8^3=10\cdot 0,0625\cdot 0,421875\cong 0,2048.$$

La probabilidad de que salgan al menos tres chicos será:

$$P(X\geq 3)=P(X=3)+P(X=4)=\binom{5}{3}0,2^3\cdot 0,8^2+\binom{5}{4}0,2^4\cdot 0,8^1=0,0512+0,0064=0,0576.$$