Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado (PAEG)

Matemáticas II – Junio 2010 – Propuesta A

PROPUESTA A. EJERCICIO 1

Enunciado:

a) Enuncia el teorema de Bolzano.

b) ¿Se puede aplicar dicho teorema a la función $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ en algún intervalo?

c) Demuestra que la función $f(x)$ anterior y $g(x)=2x-1$ se cortan en al menos un punto.

Solución:

a) Si f es una función continua en un intervalo $[a,\,b]$ y $\text{signo}\,f(a)\neq\text{signo}\,f(b)$, entonces existe un número real c perteneciente al intervalo $(a,\,b)$ tal que $f(c)=0$.

b) Como $x^2\geq 0\quad\forall x\in\mathbb{R}$, entonces $1+x^2>0\quad\forall x\in\mathbb{R}$, con lo que $\dfrac{1}{1+x^2}>0\quad\forall x\in\mathbb{R}$. Esto quiere decir que $f(x)>0\quad\forall x\in\mathbb{R}$, y entonces nunca existirán números $a,\,b\in\mathbb{R}$ que cumplan que $\text{signo}\,f(a)\neq\text{signo}\,f(b)$. Por tanto, no se puede aplicar el teorema de Bolzano a la función $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ en ningún intervalo.

c) Sea $h(x)=f(x)-g(x)=\dfrac{1}{1+x^2}-(2x-1)$. Esta función está definida y es continua en todo $\mathbb{R}$. Además $h(0)=2$ y $h(1)=-\dfrac{1}{2}$, es decir $\text{signo}\,h(0)\neq\text{signo}\,h(1)$. Aplicando el teorema de Bolzano, existe un número real $c\in(0,\,1)$ tal que $h(c)=0$, es decir, $f(c)-g(c)=0\Leftrightarrow f(c)=g(c)$, con lo que $f(x)$ y $g(x)$ se cortan en el punto $c\in(0,\,1)$.

PROPUESTA A. EJERCICIO 2

Enunciado:

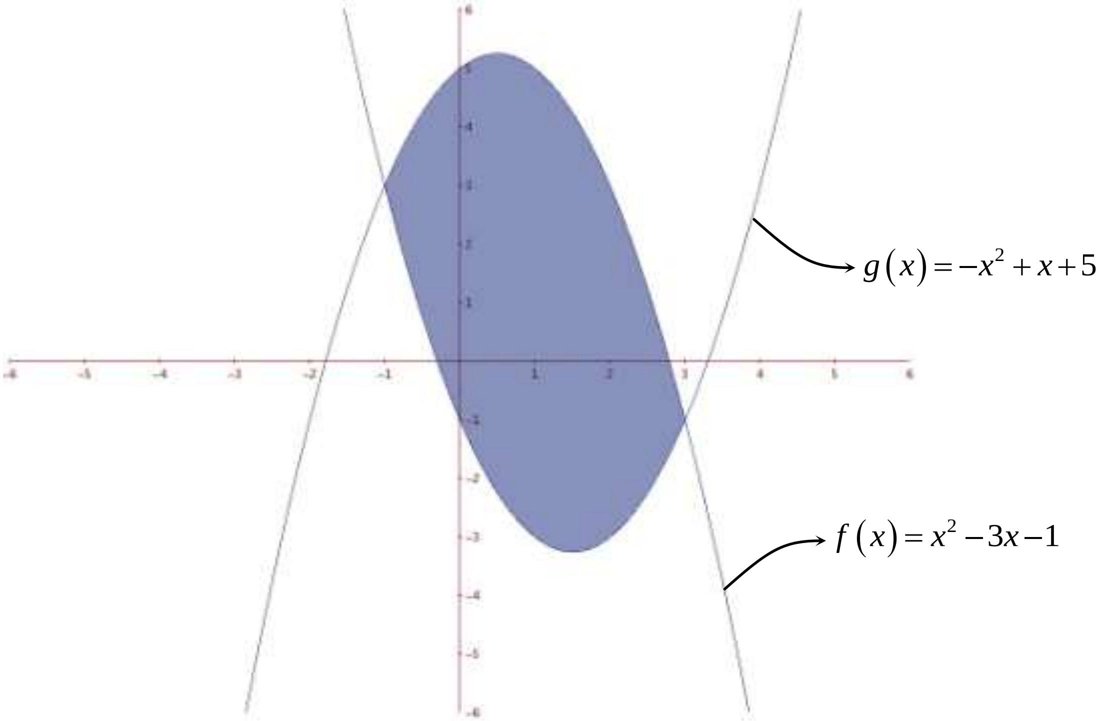
Calcula las siguientes integrales:

a) Representa gráficamente las parábolas $f(x)=x^2-3x-1$ y $g(x)=-x^2+x+5$.

b) Calcula el área del recinto limitado por ambas gráficas.

Solución:

a)



b) Según las gráficas anteriores, parece que f y g se cortan en los puntos. Veámoslo:

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow x^2-3x-1=-x^2+x+5\Leftrightarrow 2x^2-4x-6=0\Leftrightarrow x^2-2x-3=0\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=-1\\x_2=3\end{cases}$$

Entonces el área del recinto limitado por ambas gráficas es:

$$\int_{-1}^{3}\left(g(x)-f(x)\right)dx=\int_{-1}^{3}\left(\left(-x^2+x+5\right)-\left(x^2-3x-1\right)\right)dx=\int_{-1}^{3}\left(-2x^2+4x+6\right)=\left[-2\frac{x^3}{3}+4\frac{x^2}{2}+6x\right]_{-1}^{3}=$$

$$\left[-\frac{2}{3}x^3+2x^2+6x\right]_{-1}^{3}=\left(-18+18+18\right)-\left(\frac{2}{3}+2-6\right)=18-\left(-\frac{10}{3}\right)=\frac{64}{3}\text{ uds}^2$$

PROPUESTA A. EJERCICIO 3

Enunciado:

a) Clasifica en función del parámetro $k\in\mathbb{R}$ el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases}kx+y+z=k\\x+ky+z=k\\x+y+kz=k\end{cases}$$

b) Resuélvelo, si es posible, para $k=1$.

Solución:

a) Sea A la matriz de los coeficientes $A=\begin{pmatrix}k&1&1\\1&k&1\\1&1&k\end{pmatrix}$. Calculemos su determinante:

$|A|=\begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix}=\left(k^3+1+1\right)-\left(k+k+k\right)=k^3-3k+2$. Factorizando el polinomio k^3-3k+2, se tiene $|A|=k^3-3k+2=(k+2)(k-1)^2$. Por tanto $|A|=0 \Leftrightarrow \begin{cases} k=-2 \\ k=1 \end{cases}$, y de aquí:

- Si $k\neq -2$ y $k\neq 1$, $|A|\neq 0 \Rightarrow \text{rango}\,A=3$.
- Si $k=2$, el rango no es 3 pues $|A|=0$. En este caso, la matriz A queda de la forma $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y

  $\text{rango}\,A=2$, pues hay al menos un menor de orden 2 distinto de cero $\left(\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=4-1=3\right)$.
- Si $k=1$, $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y entonces $\text{rango}\,A=1$ pues claramente todos los menores de orden 2 son cero (las tres filas son iguales).

La matriz ampliada es $B=\begin{pmatrix} k & 1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 & k \\ 1 & 1 & k & k \end{pmatrix}$. Entonces

- Si $k\neq -2$ y $k\neq 1$, $\text{rango}\,A=\text{rango}\,B=3=n$ (número de incógnitas). Entonces el sistema es compatible determinado (solución única).
- Si $k=2$, la matriz ampliada B tiene rango 3, pues existe un menor de orden 3 distinto de cero (por ejemplo el formado por las columnas primera, segunda y cuarta):

  $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=(8+2+2)-(4+2+4)=12-10=2$.

  Entonces, si $k=2$, $\text{rango}\,A=2\neq 3=\text{rango}\,B$ y el sistema es incompatible (no tiene soluciones).
- Si $k=1$, claramente $\text{rango}\,A=\text{rango}\,B=1<3=n$ (número de incógnitas), y el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones). Su grado de libertad es $g=n-r=3-2=1$.

b) Para $k=1$ el sistema se reduce a una ecuación: $x+y+z=1$. Según el apartado anterior, este sistema tiene dos grados de libertad. Llamando $y=\lambda$, $z=\mu$, las infinitas soluciones se pueden escribir así: $\begin{cases} x=1-\lambda-\mu \\ y=\lambda \\ z=\mu \end{cases}$

PROPUESTA A. EJERCICIO 4

Enunciado:

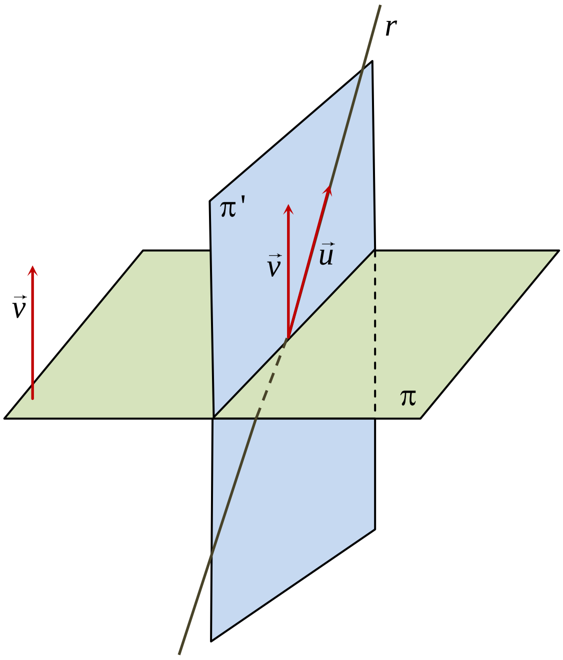
a) Estudia la posición relativa de la recta $r\equiv\begin{cases} x=-\lambda \\ y=0 \\ z=1+\lambda \end{cases}$, $\lambda\in\mathbb{R}$, y el plano de ecuación general $\pi\equiv 2x-y+3z=6$.

b) Encuentra la ecuación general de un plano π' perpendicular a π que contenga a r.

Solución:

a) Un vector director de la recta es $\vec{u}=(-1,0,1)$ y un vector normal (perpendicular) del plano es $\vec{v}=(2,-1,3)$. Como $\vec{u}\cdot\vec{v}=(-1,0,1)\cdot(2,-1,3)=-2+0+3=1\neq 0$, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no son perpendiculares, es decir, r y π no son paralelos y, por tanto, la recta r y el plano π han de ser secantes (se cortarán en un punto).

b) Para determinar π' nos hacen falta dos vectores directores y un punto. Como π' ha de contener a r, cualquier punto de r estará en π'. Tomemos pues $P(0,0,1)$ como punto de π'. Un vector director suyo será la dirección de r ($\vec{u}$), ya que $r\subset\pi'$, y otro vector director de π' puede ser $\vec{v}$ pues queremos que π' sea perpendicular a



π y $\vec{v}\perp\pi$ (ver figura).

Por tanto: $\pi'\equiv\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}=0$.

Desarrollando el determinante: $\begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}=(2y+z-1)-(-3y-x)=x+5y+z-1$

Así pues, la ecuación general del plano que se pide es $\pi'\equiv x+5y+z-1=0$.