La recta en el plano. Paralelismo, perpendicularidad y distancias

Una recta r está completamente determinada si conocemos un punto suyo $A(a_1,a_2)$ y un vector $\vec{u}=(u_1,u_2)$ que tenga la misma dirección de la de la recta (***vector director***). En este caso, cualquier punto $P(x,y)$ lo podemos escribir usando la siguiente combinación lineal: $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\lambda\vec{u}$, donde $O(0,0)$ es el origen de coordenadas y $\lambda\in\mathbb{R}$ (***parámetro***). Si escribimos la ecuación anterior en coordenadas obtenemos la ***ecuación vectorial de la recta***:

$$\boxed{(x,y)=(a_1,a_2)+\lambda(u_1,u_2)}$$

Si en la ecuación vectorial operamos e igualamos coordenadas obtenemos las ***ecuaciones paramétricas de la recta***:

$$\boxed{\begin{cases} x=a_1+\lambda u_1 \\ y=a_2+\lambda u_2 \end{cases}}$$

Despejando λ en cada una de las ecuaciones paramétricas e igualando obtenemos la ***ecuación continua de la recta***:

$$\boxed{\frac{x-a_1}{u_1}=\frac{y-a_2}{u_2}}$$

Esta última ecuación la podemos escribir así: $y-a_2=\dfrac{u_2(x-a_1)}{u_1}\Rightarrow y-a_2=\dfrac{u_2}{u_1}(x-a_1)$. Si llamamos $m=\dfrac{u_2}{u_1}$ (***pendiente de la recta***), obtenemos la llamada ***ecuación punto-pendiente de la recta***:

$$\boxed{y-a_2=m(x-a_1)}$$

Si en la ecuación anterior eliminamos el paréntesis y despejamos y obtenemos: $y=mx+a_2-ma_1$. Llamando ahora $n=a_2-ma_1$ (***ordenada en el origen de la recta***) se obtiene la **ecuación explícita o afín de la recta**:

$$\boxed{y=mx+n}$$

Partiendo de la ecuación continua de la recta también podríamos haber hecho las siguientes operaciones:

$\dfrac{x-a_1}{u_1}=\dfrac{y-a_2}{u_2}\Rightarrow u_2(x-a_1)=u_1(y-a_2)\Rightarrow u_2x-u_2a_1=u_1y-u_1a_2\Rightarrow u_2x-u_1y+u_1a_2-u_2a_1=0$. Si ahora llamamos $u_2=A$, $-u_1=B$ y $u_1a_2-u_2a_1=C$, obtenemos la ***ecuación general o implícita de la recta***:

$$\boxed{Ax+By+C=0}$$

Observemos que, dada la ecuación general, como $u_2=A$ y $-u_1=B$, un vector director de la misma será el vector $\vec{u}=(u_1,u_2)=(-B,A)$. Recordemos ahora que dos vectores $\vec{u}=(u_1,u_2)$ y $\vec{v}=(v_1,v_2)$ son perpendiculares (escribiremos $\vec{u}\perp\vec{v}$) si su producto escalar es igual a cero. Es decir: $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=0\Leftrightarrow u_1v_1+u_2v_2=0$. Por tanto, dada la ecuación general de una recta, un vector perpendicular a la misma será $\vec{v}=(v_1,v_2)=(A,B)$, ya que el producto escalar de ambos es igual a cero: $\vec{u}\cdot\vec{v}=-BA+AB=0$.

Esto es muy importante ya que permite hallar un vector director y un vector perpendicular a una recta dada solo con visualizar la ecuación general de la misma. De este modo, podemos hallar rectas paralelas y perpendiculares a una dada que pasen por un determinado punto. Veamos un ejemplo.

Supongamos que nos piden hallar la ecuación general de las rectas paralela y perpendicular a la recta $r\equiv -3x+2y+5=0$ que pasen por el punto $A(3,-1)$. Tal y como se ha comentado, un vector director $\vec{u}$ y un vector perpendicular $\vec{v}$ a la recta r serán los siguientes: $\vec{u}=(-B,A)=(-2,-3)$, $\vec{v}=(A,B)=(-3,2)$. Como las rectas que se piden pasan por el punto $A(3,-1)$, podemos escribir la ecuación continua y de ésta pasar a la general:

- Paralela: $\dfrac{x-3}{-2}=\dfrac{y+1}{-3}\Rightarrow -3(x-3)=-2(y+1)\Rightarrow -3x+9=-2y+2\Rightarrow -3x+2y+7=0$
- Perpendicular: $\dfrac{x-3}{-3}=\dfrac{y+1}{2}\Rightarrow 2(x-3)=-3(y+1)\Rightarrow 2x-6=-3y-3\Rightarrow 2x+3y-3=0$

Dos rectas r y s serán ***paralelas*** (escribiremos $r\,||\,s$) si sus vectores directores son proporcionales. Es decir, si $\vec{u}=(u_1,u_2)$ es un vector director de r, y $\vec{v}=(v_1,v_2)$ es un vector director de s, al ser proporcionales existe un número real λ tal que $\vec{u}=\lambda\cdot\vec{v}\Leftrightarrow(u_1,u_2)=(\lambda v_1,\lambda v_2)$. Es decir: $u_1=\lambda v_1$ y $u_2=\lambda v_2$. Por tanto:

$$\boxed{r\,||\,s\Leftrightarrow\frac{u_1}{v_1}=\frac{u_2}{v_2}}$$

Si las rectas están expresadas en su forma general, $r\equiv Ax+By+C=0$ y $s\equiv A'x+B'y+C'=0$, los vectores directores serán, tal y como se ha visto anteriormente, $\vec{u}=(-B,A)$ y $\vec{v}=(-B',A')$. Por tanto podemos escribir:

$$\boxed{r\,||\,s\Leftrightarrow\frac{-B}{-B'}=\frac{A}{A'}\Leftrightarrow\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}}$$

Si las rectas están expresadas en forma explícita, $r\equiv mx+n$ y $s\equiv m'x+n'$, entonces serán paralelas cuando tengan la misma pendiente, es decir

$$\boxed{r\,||\,s\Leftrightarrow m=m'}$$

Naturalmente, dos rectas serán ***secantes*** o, lo que es lo mismo, se cortarán en un punto, cuando no sean paralelas. Por último, dos rectas serán ***coincidentes*** (escribiremos $r\equiv m$) cuando tienen la misma dirección y todos sus puntos son comunes. Podemos expresar las condiciones de las tres posiciones relativas mediante la siguiente tabla:

Posiciones	**Vectores directores**	**Pendientes**	**Ecuación general**
Paralelas	$\frac{u_1}{v_1}=\frac{u_2}{v_2}$	$m=m'$	$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}\neq\frac{C}{C'}$
Coincidentes	$\frac{u_1}{v_1}=\frac{u_2}{v_2}$	$m=m'$	$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}$
Secantes	$\frac{u_1}{v_1}\neq\frac{u_2}{v_2}$	$m\neq m'$	$\frac{A}{A'}\neq\frac{B}{B'}$

Con la tabla anterior es muy fácil deducir la posición relativa de dos rectas. Si las dos rectas son secantes, el punto de corte se halla resolviendo el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas formado por las ecuaciones de las dos rectas. Si dos rectas r y s se cortan en un punto P escribiremos $r\cap s=P$.

Distancias

Es natural definir la ***distancia entre dos puntos*** $A(a_1,a_2)$ y $B(b_1,b_2)$ (escribiremos $d(A,B)$) como el módulo del vector que une el punto A con el punto B, es decir:

$$d(A,B)=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}=\left|\overrightarrow{AB}\right|$$

Para hallar la distancia de un punto $P(a,b)$ a una recta $r\equiv Ax+By+C=0$ (escribiremos $d(P,r)$) se procede del siguiente modo. Primero se calcula la recta s, perpendicular a r, que pasa por P. En segundo lugar, se halla el punto de corte Q de la recta s calculada anteriormente con la recta r. Finamente: $d(P,r)=d(P,Q)$. Observa que la construcción anterior presupone que la distancia de un punto a una recta es la más corta entre ambos.

Supongamos, como ejemplo, que tenemos que calcular la distancia del punto $P(3,-1)$ a la recta $r\equiv x-y+1=0$. Un vector perpendicular a la recta r es $\vec{v}=(A,B)=(1,-1)$. Por tanto la recta s perpendicular a r que pasa por P es $\frac{x-3}{1}=\frac{y+1}{-1}\Rightarrow -x+3=y+1\Rightarrow -x-y+2=0$. Resolviendo el sistema $\begin{cases}x-y+1=0\\-x-y+2=0\end{cases}$ se obtiene el punto de corte Q de ambas rectas. La solución del sistema es $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{3}{2}$. Por tanto, $Q\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$. Entonces se tiene que : $d(P,r)=d(P,Q)=\sqrt{\left(\frac{1}{2}-3\right)^2+\left(\frac{3}{2}+1\right)^2}=\sqrt{\left(-\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{25}{4}+\frac{25}{4}}=\sqrt{\frac{50}{4}}=\frac{\sqrt{50}}{2}$
