Tema 3: Programación lineal

1. Inecuaciones lineales con dos incógnitas

Consideramos conveniente revisar los conceptos relacionados con las inecuaciones lineales, ya que su uso va a ser continuado en este tema.

Ya sabemos que las expresiones de la forma $ax+by=c$ se denominan ecuaciones lineales con dos incógnitas y su representación gráfica es una recta. De hecho, si de la ecuación anterior se despeja y se obtiene la conocida ecuación en forma explícita de una recta $y=mx+n$.

Si en las ecuaciones lineales con dos incógnitas cambiamos el signo igual por uno de los cuatro signos de desigualdad ($<$, $\leq$, $>$, $\geq$), obtenemos una inecuación lineal con dos incógnitas.

Una ***inecuación lineal con dos incógnitas***, es toda inecuación equivalente a una de las siguientes:

$$ax+by>c \ , \ ax+by\geq c \ , \ ax+by<c \ , \ ax+by\leq c$$

es decir, cuando, después de reducirla (eliminar paréntesis, denominadores, etc.), se puede expresar como una de las cuatro formas anteriores.

Es conocido que los valores que satisfacen la ecuación $ax+by=c$ son los puntos situados sobre una recta. Esta recta divide al plano en dos semiplanos. Estos semiplanos van a constituir las soluciones de las inecuaciones asociadas a $ax+by=c$.

El ***conjunto de soluciones*** de una inecuación, es decir, el ***semiplano*** de soluciones de la inecuación, se determina de la forma siguiente:

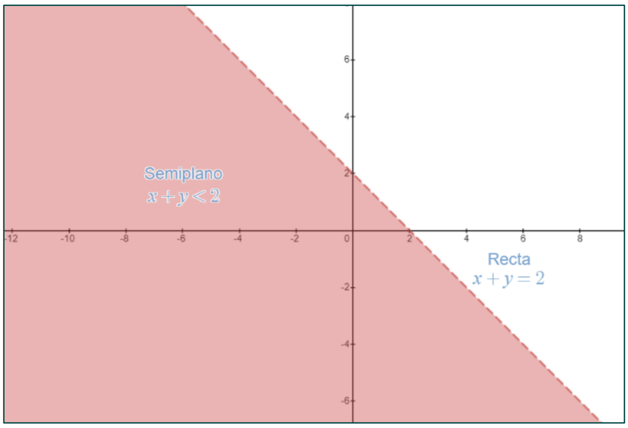
- Se dibuja la recta asociada a la inecuación. Esta recta divide al plano en dos regiones o semiplanos.
- Para averiguar cuál es la región válida, el procedimiento práctico consiste en elegir un punto que no pertenezca a la recta, y comprobar si las coordenadas satisfacen o no a la inecuación. Si lo hacen, la región en la que está ese punto es aquella cuyos puntos verifican la inecuación; en caso contrario, la región válida es la otra.

Ejercicio resuelto

1 Encuentra y representa gráficamente el conjunto de soluciones de la inecuación siguiente: $x+y<2$.

Solución

En la figura de la derecha puede verse como la gráfica de la recta de ecuación $x+y=2$ (en línea discontinua) divide al plano en dos regiones. Elegimos el punto $(0,0)$ que no pertenece a la recta y se encuentra situado "por debajo" de la misma. Introduciendo las coordenadas de este punto en la inecuación $x+y<2$, vemos que se satisface (puesto que $0<2$). Por tanto, el conjunto de soluciones de la inecuación es el semiplano situado "por debajo" de la recta $x+y=2$.



➢ Sistemas de inecuaciones lineales

Un sistema de inecuaciones lineales con dos incógnitas es el conjunto de dos o más inecuaciones que deben satisfacerse a la vez.

Para su resolución se procede de la manera siguiente:

- Se resuelve cada inecuación por separado, es decir se encuentra el semiplano de soluciones de cada una de las inecuaciones.
- El ***conjunto solución*** del sistema, también llamado ***región factible***, está formado por la intersección o región común de las soluciones de todas las inecuaciones.

Como ocurría con los sistemas de ecuaciones lineales, los sistemas de inecuaciones lineales pueden presentar varias opciones respecto a sus soluciones: puede no existir solución, en el caso que exista conjunto solución puede ser acotado o no.

Conviene destacar que, en el caso en el que el conjunto solución es una ***región acotada***, sus puntos estarán encerrados por un ***polígono convexo***.

Ejercicio resuelto

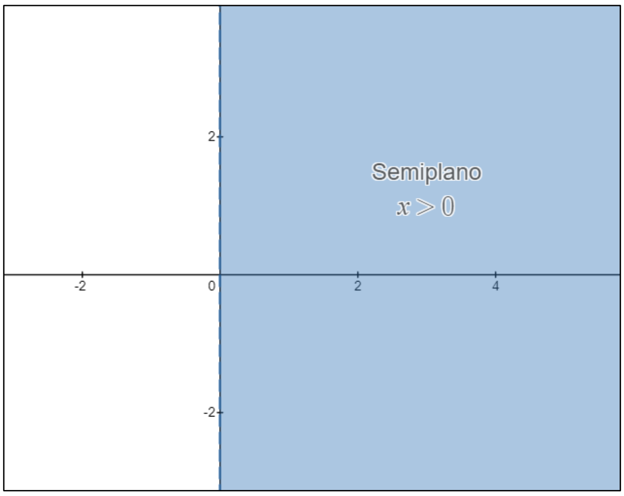
2 Dibuja las regiones factibles de los sistemas siguientes:

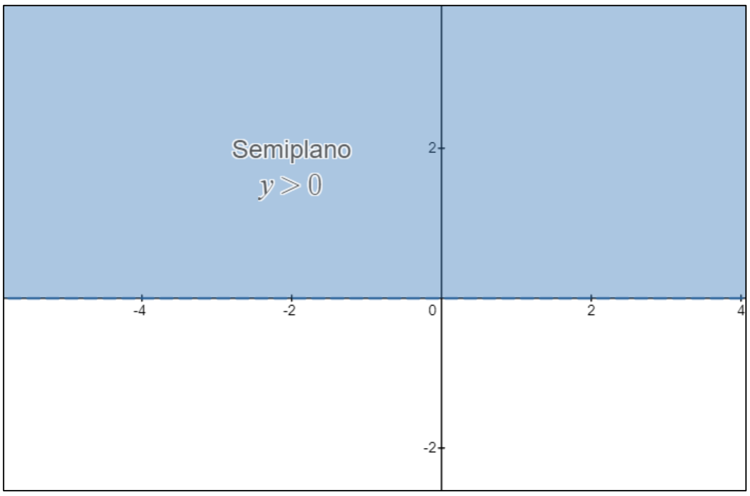
a) $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x + 2y < 8 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ 2x + 3y > 6 \end{cases}$; **c)** $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x + y < -1 \end{cases}$

Solución

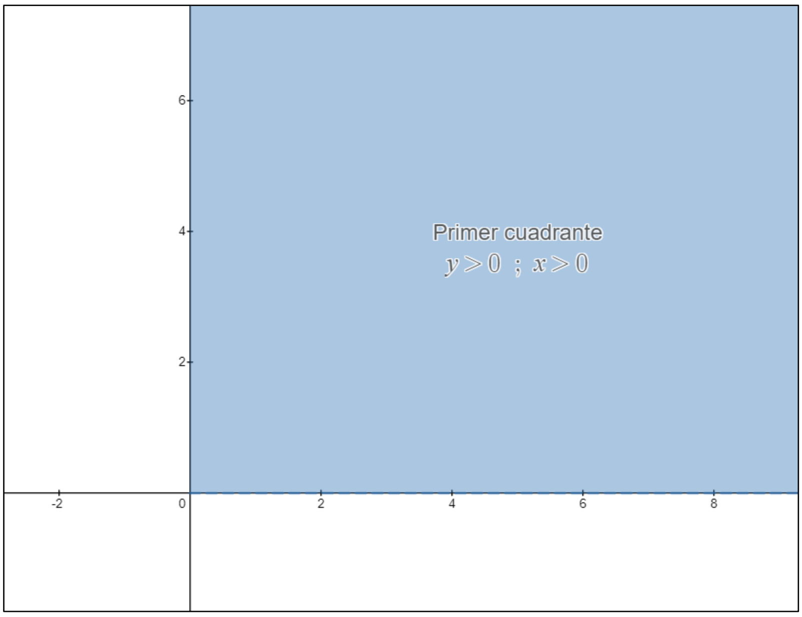
Merece la pena detenerse a considerar los semiplanos solución de las dos primeras inecuaciones que aparecen en los tres sistemas: $x > 0$ y $y > 0$. La razón es que, en los problemas de aplicación, aparecen siempre y vienen a indicar que trabajamos con magnitudes positivas.

Desde el punto de vista geométrico, la ecuación $x = 0$, es justamente el eje Y, o eje de ordenadas. Por tanto, la inecuación $x > 0$ representa el semiplano que queda a la derecha del eje Y. También, y de manera similar, la ecuación $y = 0$ es el eje X, o eje de abscisas. De este modo la inecuación $y > 0$ es el semiplano que se encuentra por encima del eje X. Observa los semiplanos, en azul, en las dos figuras.

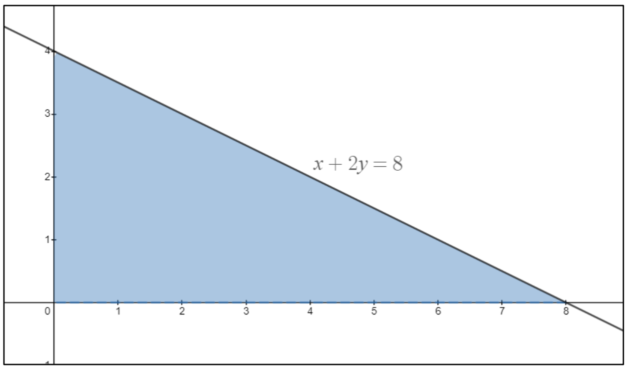


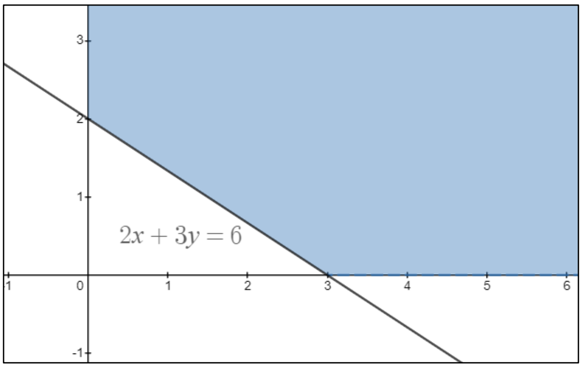


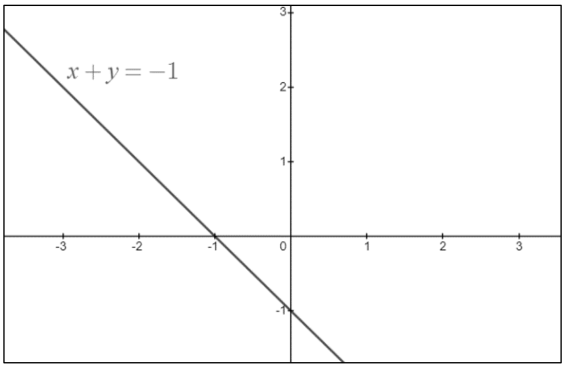
De las consideraciones anteriores podemos deducir claramente que las regiones factibles (caso de haberlas) de cada uno de los casos anteriores deben de encontrarse en el primer cuadrante. Esto es lo que ocurre en general en los problemas que se resuelven en la práctica, asociados a situaciones más o menos reales.



Ahora basta buscar para cada una de las inecuaciones su semiplano de soluciones y, por último, la región común a todos los semiplanos. En las representaciones gráficas que siguen puede verse la región factible o región de soluciones de cada uno de los sistemas: respectivamente de izquierda a derecha y de arriba abajo, el apartado a), el apartado b) y el apartado c).







En el último caso no hay región factible posible porque el semiplano $x + y < -1$ queda "a la izquierda" de la recta $x + y = -1$, con lo que no tiene nada en común con el primer cuadrante.

2. Programación lineal. Definiciones

A finales de la década de los años cuarenta se desarrolló la técnica algebraica denominada programación lineal para resolver problemas de asignación de recursos entre distintas actividades de ámbito económico. Las aplicaciones a otros tipos de problemas han sido numerosas.

Veamos la formulación algebraica del problema o ***modelo de programación lineal***, llamado también ***programa lineal***.

Se llama ***programa lineal*** a la formulación algebraica que pretende resolver la situación siguiente:

Optimizar (maximizar o minimizar) una ***función objetivo***, función lineal de varias variables, sujeta a una serie de ***restricciones***, expresadas por ecuaciones e inecuaciones lineales.

➢ Programación lineal para dos variables. Métodos de solución

Todas las situaciones que se estudian en este tema presentan dos variables. En el caso en el que los programas lineales tengan dos variables, que llamaremos x e y, la formulación algebraica de los problemas de máximos y mínimos es como sigue:

Maximizar $f(x,y)=ax+by$ sujeto a:	Minimizar $f(x,y)=ax+by$ sujeto a:
$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y\le b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y\le b_2 \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x+a_{m2}y\le b_m \\ x\ge 0, \quad y\ge 0 \end{cases}$	$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y\ge b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y\ge b_2 \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x+a_{m2}y\ge b_m \\ x\ge 0, \quad y\ge 0 \end{cases}$

En los programas lineales anteriores llamamos:

- ***Variables de decisión*** a las variable x e y.
- ***Restricciones*** a las inecuaciones lineales expresadas en las variables de decisión.
- **Función objetivo** a la función $f(x,y)=ax+by$, función lineal que hay que optimizar.

✓ Etapas en la formulación de un programa lineal

Con objeto de simplificar la formulación de un programa lineal, es conveniente realizar el planteamiento algebraico de un enunciado a través de los pasos o etapas siguientes:

1. ***Recoger la información*** relativa a los elementos del problema ***en una tabla***.
2. ***Determinar las variables de decisión*** y darles nombre: x, y.
3. ***Expresar analíticamente la función objetivo***, función lineal de las variables de decisión x e y, que hay que optimizar.
4. ***Escribir las restricciones***, expresadas como inecuaciones lineales de las variables de decisión.

✓ *Método gráfico para la obtención de soluciones*

Para la obtención de soluciones, por el denominado ***método gráfico***, de un programa lineal de dos variables ya formulado, realizaremos los pasos siguientes:

1. Hallamos la región factible a que dan lugar las restricciones.

2. Igualamos la función objetivo a cero: $ax+by=0$ y representamos gráficamente la recta asociada, llamada ***recta de beneficio nulo***.

3. Recorremos la región factible mediante rectas paralelas a la anterior, realizando un "barrido" de la misma. Estas rectas son de la forma $ax+by=k$, y se llaman ***rectas de beneficio constante*** o ***líneas de nivel***.

4. De todas esas líneas, buscar la que corresponde al valor óptimo (máximo o mínimo) de la función objetivo. En el caso de solución única, la línea de nivel que solamente toque en un punto a la región factible es la que proporciona la solución buscada del programa lineal correspondiente. Cuando el programa lineal presenta solución múltiple, la recta de nivel puede tocar en todos los puntos de un segmento o lado de la región factible.

✓ *Método analítico para la obtención de soluciones*

El siguiente resultado, denominado teorema fundamental de la programación lineal, nos permite conocer otro método de solucionar un programa lineal con dos variables.

En un programa lineal con dos variables, si existe una solución única que optimice la función objetivo, ésta se encuentra en un ***punto extremo (vértice) de la región factible*** acotada, nunca en el interior de dicha región. Si la función objetivo toma el mismo valor óptimo en dos vértices, también toma idéntico valor en los puntos del segmento o lado que determinan. En el caso de que la región factible es no acotada, la función lineal objetivo no alcanza necesariamente un valor óptimo concreto, pero, si lo hace, éste se encuentra en uno de los ***vértices de la región***.

La evaluación de la función objetivo en los vértices de la región factible nos va a permitir encontrar el valor óptimo (máximo o mínimo) en alguno de ellos.

✓ *Clases de programas lineales para dos variables*

Vamos a considerar las distintas situaciones que se suelen presentar en los programas lineales para dos variables. Describimos, en primer lugar, las clases de programas que nos vamos a encontrar y posteriormente se ejemplifican cada uno de los casos en los ejercicios de aplicación desarrollados.

Los programas lineales para dos variables pueden clasificarse, atendiendo al tipo de solución que presentan, en los casos siguientes:

- ***Factibles con solución única***, cuando presentan un único punto óptimo.
- ***Factibles con solución múltiple***, si presentan más de una solución óptima. En estos casos, las soluciones suelen ser todos los puntos de un segmento o lado, es decir, los puntos comprendidos entre dos vértices de la región factible.
- ***Factible no acotada***, cuando no existe límite para la función objetivo, es decir, la función objetivo puede hacerse tan grande como se desee en la región factible.
- **No factible**, si no existe el conjunto de soluciones. En estas situaciones, las desigualdades que describen las restricciones son inconsistentes.

Ejercicios resueltos

3 Una casa empacadora de alimentos recibe diariamente 700 kg de café de tipo C y 800 kg de café de tipo K. Hace con ellos dos mezclas. La de tipo A que consta de 2 partes de café de tipo C y 1 de tipo K en la que gana 22 céntimos por kilo y la de tipo B que consta de una parte de tipo C y 2 del tipo K en la que gana 26 céntimos por kilo. Halla la cantidad de mezcla que la casa debe preparar de cada clase para que la ganancia sea máxima.

Solución

La información puede verse resumida en la tabla siguiente:

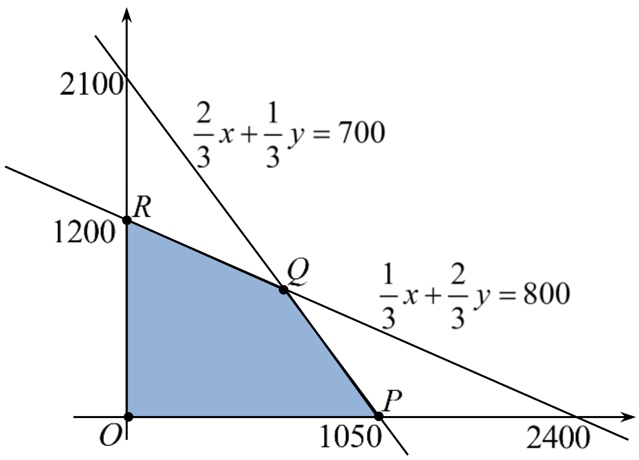
	Mezcla tipo A	Mezcla tipo B	Recursos
Café tipo C (kg)	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	700
Café tipo K (kg)	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	800
Beneficios	22	26	
Producción	x	y	

El programa lineal correspondiente al enunciado es:

Maximizar la función objetivo: $f(x,y)=22x+26y$ sujeta a las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y\le 700 \\ \frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y\le 800 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$$

El conjunto de soluciones factibles es el de los puntos del interior del polígono convexo limitado por los vértices $OPQR$ que queda sombreado en la figura de la derecha.



Las coordenadas de los vértices son:

$O(0,0)$, $P(1050,0)$, $Q(600,900)$ y $R(0,1200)$.

Los valores de la función objetivo en cada uno de los vértices son:

$f(0,0)=0$, $f(1050,0)=23100$, $f(600,900)=36000$ y $f(0,1200)=31200$.

La casa empacadora debe hacer por tanto una mezcla de 600 kg de café de tipo A y 900 kg de tipo B para que la ganancia sea la máxima posible (31200 céntimos, o lo que es lo mismo, 312 euros).

4 Una ganadería desea proporcionar a su ganado una dieta que contenga un mínimo de 24 unidades del pienso A y un mínimo de 25 unidades del pienso B. En el mercado se comercializan dos tipos de compuestos C_1 y C_2, elaborados con ambos piensos. El paquete de C_1 contiene 1 unidad de A y 5 de B, siendo su precio de 100 euros, y el de C_2 contiene 4 unidades e A y una de B, siendo su precio de 300 euros. ¿Qué cantidades de C_1 y de C_2 deberá emplear la ganadería para preparar su dieta con el mínimo coste?

Solución

La información puede verse resumida en la tabla siguiente:

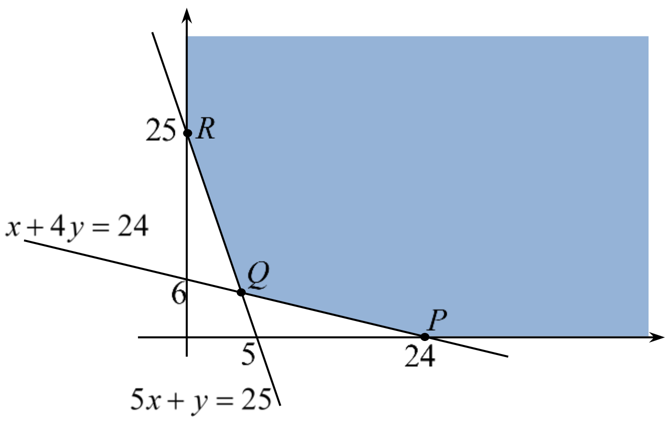
	Compuesto C_1	Compuesto C_2	Unidades
Pienso A	1	4	24
Pienso B	5	1	25
Coste	100	300	
Producción	x	y	

El programa lineal correspondiente al enunciado es:

Minimizar la función objetivo: $f(x,y)=100x+300y$ sujeta a las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} x+4y\geq 24 \\ 5x+y\geq 25 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases}$$

El conjunto de soluciones factibles es el de los puntos del interior de la región convexa de vértices P, Q y R que queda sombreada en la figura de la derecha.



Las coordenadas de los vértices son:

$P(24,0)$, $Q(4,5)$ y $R(0,25)$.

Los valores de la función objetivo en cada uno de los vértices son:

$f(24,0)=2400$, $f(4,5)=1900$ y $f(0,25)=7500$.

La ganadería empleará 4 paquetes de C_1 y 5 de C_2 para preparar su dieta con el mínimo coste de 1900 €.

5 Se quiere elaborar una dieta diaria para ganado que satisfaga unas condiciones mínimas de contenidos vitamínicos al día: 2 mg de vitamina A, 3 mg de vitamina B, 30 de la C y 2 de la D. Para ello se van a mezclar piensos de dos tipos, P y Q, cuyo precio por kg es para ambos de 30 céntimos de euro, y cuyo contenido vitamínico por kg se recoge en la siguiente tabla:

	A	B	C	D
P	1 mg	1 mg	20 mg	2 mg
Q	1 mg	3 mg	7,5 mg	0 mg

¿Cómo deben mezclarse los piensos para que el gasto sea mínimo? ¿Cuál es este gasto mínimo?

Solución

Llamando x a los kg de P e y a los kg de Q, el programa lineal correspondiente al enunciado es:

Minimizar la función objetivo: $f(x,y)=30x+30y$ sujeta a las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} x+y\geq 2 \\ x+3y\geq 3 \\ 20x+7{,}5y\geq 30 \\ 2x\geq 2 \\ x\geq 0, \quad y\geq 0 \end{cases}$$

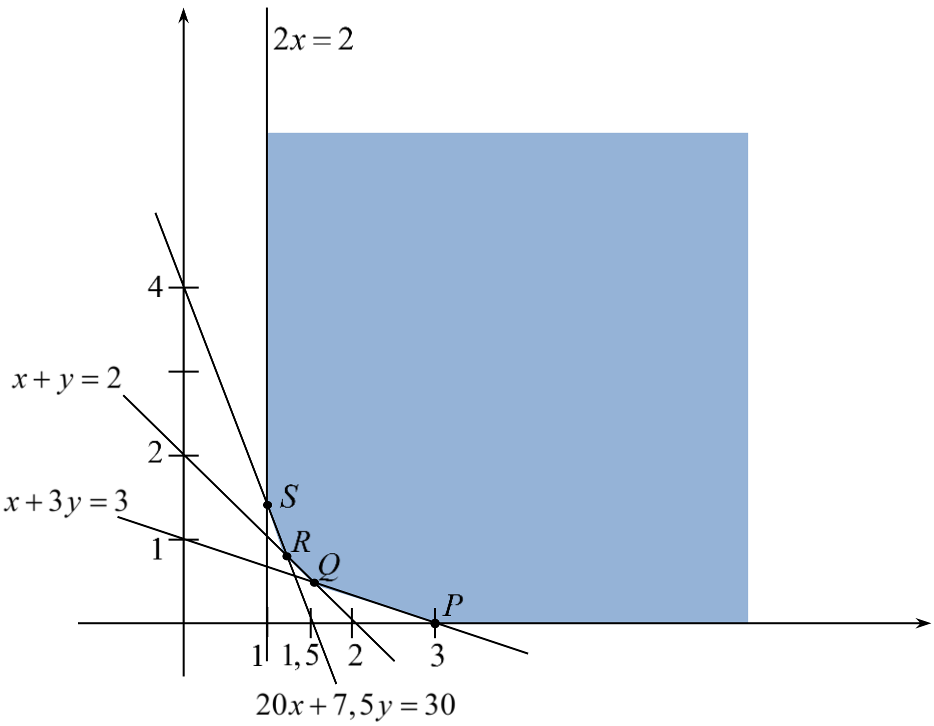
El conjunto de soluciones factibles es el de los puntos del interior de la región convexa de vértices P, Q, R y S que queda sombreada en la figura inferior.

Las coordenadas de los vértices son: $P(3,0)$, $Q(15,\ 0{,}5)$, $R(1{,}2\ ,\ 0{,}8)$ y $S(1,\ 1{,}33)$.

Los valores de la función objetivo en cada uno de los vértices son:

$f(3,0)=90$, $f(1{,}5\ 0{,}5)=60$, $f(1{,}2\ ,\ 0{,}8)=60$ y $f(1,\ 1{,}33)=69$.

Las coordenadas de cualquier punto del segmento de extremos Q y R es solución del problema, proporcionando un gasto mínimo de 60 céntimos de euro.



Ejercicios

1. Los abonos A y B se obtienen mezclando cierto sustrato con dos fertilizantes F_1 y F_2 en las siguientes proporciones:

	F_1	F_2
A	100 g/kg	50 g/kg
B	70 g/kg	80 g/kg

La cantidad disponible de los fertilizantes F_1 y F_2 son 39 kg y 24 kg. El beneficio que producen los abonos A y B son 75 céntimos/kg y 60 céntimos/kg. ¿Cuántos kilos se deben fabricar del abono A y del abono B para maximizar el beneficio?

Solución: 320 kg de abono del tipo A y 100 kg de abono del tipo B.

2. Para abonar una parcela de huerta se necesitan por los menos 8 kg de nitrógeno y 12 kg de fósforo. Se dispone de un producto A cuyo precio es de 30 céntimos/kg y que contiene un 10% de nitrógeno y un 30% de fósforo. Existe en el mercado otro producto B que contiene un 20% de nitrógeno y un 20% de fósforo, y cuyo precio es de 40 céntimos/kg. ¿Qué cantidad se deben tomar de A y B para abonar la parcela con el menor gasto posible?

Solución: 20 kg del producto A y 30 kg del producto B.

3. Se desean obtener tres elementos químicos a partir de las sustancias A y B. Un kilo de A contiene 8 gramos del primer elemento, 1 gramo del segundo y 3 del tercero; un kilo de B tiene 4 gramos del primer elemento, 1 gramo del segundo y 2 del tercero. Se desea obtener al menos 16 gramos del primer elemento y las cantidades del segundo y del tercero han de ser como mucho 5 y 20 gramos respectivamente y la cantidad de A es como mucho el doble que la de B. Calcular los kilos de A y los de B que han de tomarse para que el coste sea mínimo si un kilo de A vale 200 euros y uno de B 1000 euros. ¿Puede eliminarse alguna restricción?

Solución: deben emplearse 1,6 kg de A y 0,8 kg de B.

4. Una compañía aérea tiene dos aviones A y B para cubrir un determinado trayecto. El avión A debe hacer más veces el trayecto que el avión B pero no puede sobrepasar 120 viajes. Entre los dos aviones deben hacer 60 o más vuelos, pero no más de 200. En cada vuelo A consume 900 litros de combustible y B 700 litros. En cada viaje del avión A la empresa gana 2000 euros y 1500 por cada viaje del B. ¿Cuántos viajes debe hacer cada avión para obtener el máximo de ganancias? ¿Cuántos vuelos debe hacer cada avión para que el consumo de combustible sea mínimo?

Solución: el consumo de combustible será mínimo si cada avión hace 30 viajes y el beneficio máximo se obtiene si el avión A hace 120 viajes y el B hace 80.

5. Se desea fabricar dos tipos de bombones que llamaremos A y B. Las cajas del tipo A contienen 1 kg de chocolate y 2 kg de cacao; las del tipo B contienen 2 kg de chocolate, 1 kg de cacao y 1 kg de almendras. Disponemos de 500 kg de chocolate, 400 de cacao y 225 de almendras. Por cada caja del tipo A se ganan 2 euros y por cada caja del tipo B 3 euros. ¿Cuántas cajas de cada tipo hay que fabricar para que la ganancia se máxima?

Solución: hay que fabricar 100 cajas del tipo A y 200 del tipo B.

6. Un laboratorio fabrica los complejos vitamínicos REVIT y VITAL que se venden a 192 céntimos y 221 céntimos la caja, respectivamente. La siguiente tabla indica los contenidos en vitaminas A y B por caja de cada producto:

	A	B
REVIT	4 gramos	6 gramos
VITAL	7 gramos	3 gramos

El coste de 1 gramo de vitamina A es de 5 céntimos y el coste de 1 gramo de vitamina B es de 12 céntimos. Justificar que el beneficio obtenido al vender x cajas de REVIT e y cajas de VITAL es $100x+150y$. Se dispone de 38 gramos de vitamina A y 42 gramos de vitamina B. ¿Cuántas cajas de REVIT y cuántas cajas de VITAL deben fabricarse para que el beneficio $100x+150y$ sea máximo?

Solución: se deben fabricar 6 cajas de REVIT y 2 cajas de VITAL.

7. Disponemos de 21 millones de euros para invertir en bolsa. Nos recomiendan dos tipos de acciones. Las del tipo A que rinden el 10% y las del tipo B que rinden el 8%. Decidimos invertir un máximo de 13 millones de euros en las del tipo A y como mínimo 600000 euros en las del tipo B. Además, queremos que la inversión en las del tipo A sea menor o igual que el doble de la inversión en B. ¿Cuál tiene que ser la distribución de la inversión para obtener el máximo interés anual?

Solución: la inversión en acciones del tipo A ha de ser de 13 millones de euros y la inversión en acciones del tipo B de 8 millones de euros.

8. Un fabricante de aviones produce en dos fábricas tres tipos de aparatos: el A, el B y el C. Se ha comprometido a entregar semanalmente a un emirato árabe 12 aviones del tipo A, 8 del tipo B y 24 del tipo C. Al fabricante le cuesta 2 millones de pesetas diarias el funcionamiento de la primera fábrica y 1,6 millones de pesetas el de la segunda. La primera fábrica produce, en un día, 6 aviones del tipo A, 2 del tipo B y 4 del tipo C mientras que la segunda produce, respectivamente, 2, 2 y 12. ¿Cuántos días por semana debe trabajar cada fábrica para, cumpliendo el contrato del emir, conseguir reducir al máximo los costos de funcionamiento de las fábricas?

Solución: la primera fábrica debe trabajar un día y la segunda tres días.

9. En un almacén se guarda aceite de girasol y de oliva. Para atender a los clientes se ha de tener almacenado un mínimo de 20 bidones de aceite de girasol y 40 de aceite de oliva y, además, el número de bidones de aceite de oliva no debe ser inferior a la mitad del número de bidones de aceite de girasol. La capacidad total del almacén es de 150 bidones. Sabiendo que el gasto de almacenaje de un bidón de aceite de oliva es de 100 euros y de uno de girasol de 50 euros, ¿cuántos bidones de cada tipo habrá que almacenar para que el gasto sea mínimo? ¿Y para que el gasto sea máximo?

Solución: para que el gasto sea mínimo habrá que almacenar 20 bidones de aceite de girasol y 40 de aceite de oliva. Para que el gasto sea máximo habrá que almacenar 20 bidones de aceite de girasol y 130 de aceite de oliva.

10. Con 80 kg de acero y 120 kg de aluminio se quieren fabricar bicicletas de montaña y de paseo que se venderán a 200 euros y 150 euros, respectivamente. Para la de montaña son necesarios 1 kg de acero y 3 kg de aluminio y para la de paseo, 2 kg de cada uno de los materiales. ¿Cuántas bicicletas de cada tipo se deben fabricar para maximizar el beneficio?

Solución: se deben hacer 20 bicicletas de montaña y 30 de paseo para maximizar el beneficio.