Matemáticas II

Ejercicios de Probabilidad (segunda parte)

1. Se cree que hay una vuelta hacia estilos de baile más populares, por lo que se realiza una encuesta a estudiantes de bachillerato, resultando que al 40 % les gusta la salsa, al 30 % les gusta el merengue y al 10 % les gusta tanto la salsa como el merengue.

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que a un estudiante le guste el merengue si le gusta la salsa?

   b) ¿Y la de que a un estudiante le guste el merengue si no le gusta la salsa?

   c) ¿Son independientes los sucesos "gustar la salsa" y "gustar el merengue"? ¿Son compatibles?

   Solución

   Sean los sucesos S, "que le guste la salsa" y M, "que le guste el merengue". Entonces $P(S)=0,4$; $P(M)=0,3$ y $P(S\cap M)=0,1$.

   a) $P(M/S)=\dfrac{P(M\cap S)}{P(S)}=\dfrac{0,1}{0,4}=0,25$.

   b) $P(M/\overline{S})=\dfrac{P(M\cap\overline{S})}{P(\overline{S})}=\dfrac{P(M-S)}{1-P(S)}=\dfrac{P(M)-P(M\cap S)}{1-P(S)}=\dfrac{0,3-0,1}{1-0,4}=\dfrac{0,2}{0,6}=0,33$.

   c) Puesto que $P(M)\cdot P(S)=0,3\cdot 0,4=0,12\neq 0,1=P(M\cap S)$, los sucesos "gustar la salsa" y "gustar el merengue" no son independientes.

   Para que fueran incompatibles no deberían tener nada en común, es decir, $S\cap M=\varnothing$. Pero esto no es posible porque $P(\varnothing)=0$ y sabemos que $P(S\cap M)=0,1$. Por tanto, los sucesos "gustar la salsa" y "gustar el merengue" tampoco son incompatibles.

2. En una urna A hay 10 bolas verdes y 10 rojas, y en otra urna B hay 15 verdes y 5 rojas. Se lanza un dado, de forma que si sale múltiplo de 3 se extrae una bola de la urna A y en el resto de casos se extrae una bola de la urna B.

   a) Calcular la probabilidad de que la bola extraída sea roja.

   b) Si la bola extraída resulta ser de color verde, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la urna B?

   Solución

   Llamemos A al suceso "extraer bola de la urna A" y B al suceso "extraer bola de la urna B". Si en el dado sale múltiplo de 3, es decir, sale 3 o 6, extraemos bola de la urna A. Por tanto, $P(A)=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$ y $P(B)=\dfrac{2}{3}$.

   Además, si llamamos V al suceso "extraer bola verde" y R al suceso "extraer bola roja", tenemos que $P(V/A)=\dfrac{10}{20}=\dfrac{1}{2}$; $P(R/A)=\dfrac{10}{20}=\dfrac{1}{2}$; $P(V/B)=\dfrac{15}{20}=\dfrac{3}{4}$; $P(R/B)=\dfrac{5}{20}=\dfrac{1}{4}$.

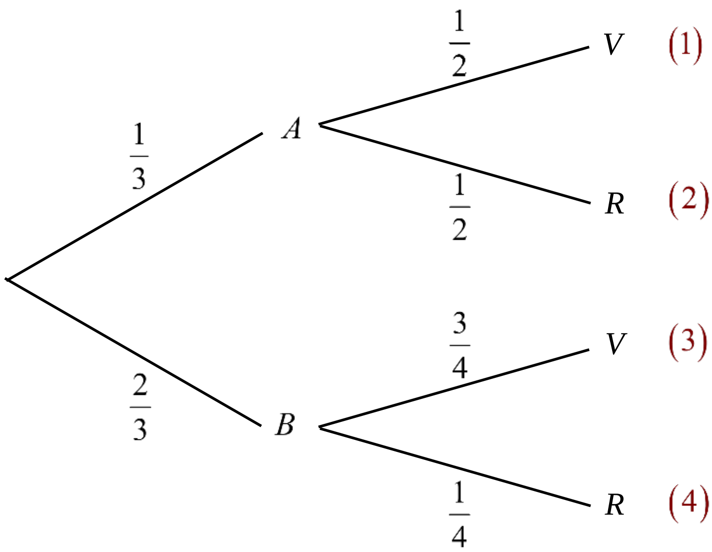
   a) Por el teorema de la probabilidad se tiene que

   $$P(R)=P(A\cap R)+P(B\cap R)=P(A)\cdot P(R/A)+P(B)\cdot P(R/B)=$$
   $$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{6}+\frac{2}{12}=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

b) $P(B/V)=\dfrac{P(B\cap V)}{P(V)}=\dfrac{P(B)\cdot P(V/B)}{1-P(R)}=\dfrac{\dfrac{2}{\cancel{3}}\cdot\dfrac{\cancel{3}}{4}}{1-\dfrac{1}{3}}=\dfrac{\dfrac{1}{2}}{\dfrac{2}{3}}=\dfrac{3}{4}$.

Hemos usado que el suceso “salir bola verde” es el contrario del suceso “salir bola roja”.

Hagamos también este problema con un diagrama de árbol.



a) $P(R)=(2)+(4)=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{6}+\dfrac{2}{12}=\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$.

b) $P(B/V)=\dfrac{P(B\cap V)}{P(V)}=\dfrac{(3)}{(1)+(3)}=\dfrac{\dfrac{2}{\cancel{3}}\cdot\dfrac{\cancel{3}}{4}}{\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{\cancel{3}}\cdot\dfrac{\cancel{3}}{4}}=\dfrac{\dfrac{1}{2}}{\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{2}}=\dfrac{\dfrac{1}{2}}{\dfrac{4}{6}}=\dfrac{\dfrac{1}{2}}{\dfrac{2}{3}}=\dfrac{3}{4}$.

3. En una empresa, el 65 % de sus empleados habla inglés, y de éstos, el 40 % habla también alemán. De los que no hablan inglés, el 25% habla alemán. Se escoge un empleado al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que hable ambos idiomas?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que hable alemán?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que, sabiendo que habla alemán, hable también inglés?

Solución

Llamemos I al suceso “hablar inglés” y llamemos A al suceso “hablar alemán”. Entonces $P(I)=0,65$; $P(A/I)=0,4$; $P(A/\bar{I})=0,25$.

a) Puesto que $P(A/I)=\dfrac{P(A\cap I)}{P(I)}$, tenemos: $0,4=\dfrac{P(A\cap I)}{0,65}\Rightarrow P(A\cap I)=0,4\cdot 0,65=0,26$.

b) Puesto que $P(A/\bar{I})=\dfrac{P(A\cap\bar{I})}{P(\bar{I})}=\dfrac{P(A-I)}{1-P(I)}=\dfrac{P(A)-P(A\cap I)}{1-P(I)}$, volviendo a sustituir tenemos:

$$0,25=\frac{P(A)-0,26}{1-0,65}\Rightarrow 0,25=\frac{P(A)-0,26}{0,35}\Rightarrow 0,25\cdot 0,35=P(A)-0,26\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0,0875 = P(A) - 0,26 \Rightarrow P(A) = 0,0875 + 0,26 = 0,3475 .$$

c) $P(I/A) = \dfrac{P(I \cap A)}{P(A)} = \dfrac{0,26}{0,3475} = 0,7482$.

4. Un Centro de Salud propone dos terapias, A y B, para dejar de fumar. De las personas que acuden al Centro para dejar de fumar, el 45 % elige la terapia A, y el resto la B. Después de un año el 70 % de los que siguieron la terapia A y el 80 % de los que siguieron la B no han vuelto a fumar. Se elige al azar un usuario del Centro que siguió una de las dos terapias:

   a) Calcular la probabilidad de que después de un año no haya vuelto a fumar.

   b) Si transcurrido un año esa persona sigue sin fumar, calcule la probabilidad de que hubiera seguido la terapia A.

   c) Si transcurrido un año esa persona ha vuelto a fumar, calcule la probabilidad de que hubiera seguido la terapia A.

Solución

Llamemos A al suceso "seguir la terapia A" y B al suceso "seguir la terapia B". Llamemos también F al suceso "dejar de fumar". Entonces $P(A) = 0,45$; $P(B) = 0,55$; $P(F/A) = 0,7$; $P(\overline{F}/A) = 0,3$; $P(F/B) = 0,8$ y $P(\overline{F}/B) = 0,2$.

a) Por el teorema de la probabilidad total, tenemos:

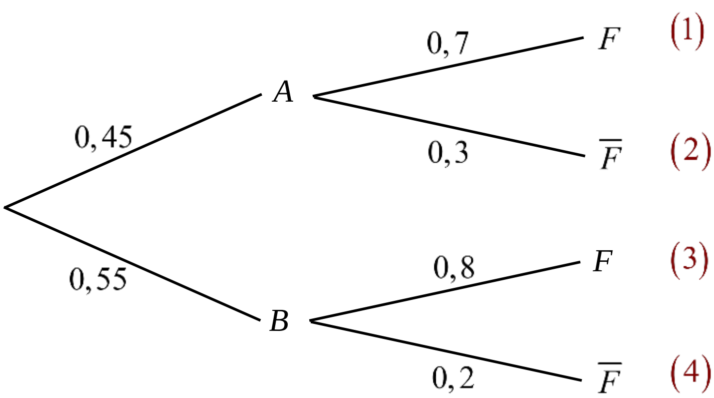
$$P(F) = P(A \cap F) + P(B \cap F) = P(A) \cdot P(F/A) + P(B) \cdot P(F/B) =$$

$$= 0,45 \cdot 0,7 + 0,55 \cdot 0,8 = 0,315 + 0,44 = 0,755 .$$

b) $P(A/F) = \dfrac{P(A \cap F)}{P(F)} = \dfrac{P(A) \cdot P(F/A)}{P(F)} = \dfrac{0,45 \cdot 0,7}{0,755} = \dfrac{0,315}{0,755} = 0,417$.

c) $P(A/\overline{F}) = \dfrac{P(A \cap \overline{F})}{P(\overline{F})} = \dfrac{P(A) \cdot P(\overline{F}/A)}{1 - P(F)} = \dfrac{0,45 \cdot 0,3}{1 - 0,755} = \dfrac{0,135}{0,245} = 0,551$.

Hagamos el problema usando un diagrama de árbol.



a) $P(F) = (1) + (3) = 0,45 \cdot 0,7 + 0,55 \cdot 0,8 = 0,315 + 0,44 = 0,755$.

b) $P(A/F) = \dfrac{P(A \cap F)}{P(F)} = \dfrac{(1)}{P(F)} = \dfrac{0,45 \cdot 0,7}{0,755} = \dfrac{0,315}{0,755} = 0,417$.

c) $P\left(A/\overline{F}\right)=\dfrac{P\left(A\cap\overline{F}\right)}{P\left(\overline{F}\right)}\overset{(2)}{=}\dfrac{(2)}{1-P(F)}=\dfrac{0,45\cdot 0,3}{1-0,755}=\dfrac{0,135}{0,245}=0,551$.

5. De los sucesos independientes A y B se sabe que $P\left(\overline{A}\right)=0,4$ y $P(A\cup B)=0,8$.

   a) Hallar la probabilidad de B.

   b) Hallar la probabilidad de que no se verifique B si se ha verificado A.

   c) ¿Son incompatibles los sucesos A y B?

   Solución

   a) Puesto que $P\left(\overline{A}\right)=0,4$, entonces $1-P(A)=0,4\Rightarrow P(A)=0,6$. Además, como los sucesos son independientes, $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)\Rightarrow P(A\cap B)=0,6\cdot P(B)$.

   Ahora, como $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$, sustituyendo tenemos que

   $0,8=0,6+P(B)-0,6\cdot P(B)\Rightarrow 0,2=0,4\cdot P(B)\Rightarrow P(B)=\dfrac{0,2}{0,4}=0,5$.

   b) $P\left(\overline{B}/A\right)=\dfrac{P\left(\overline{B}\cap A\right)}{P(A)}=\dfrac{P\left(A\cap\overline{B}\right)}{P(A)}=\dfrac{P(A-B)}{P(A)}=\dfrac{P(A)-P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{0,6-0,6\cdot 0,5}{0,6}=0,5$.

   c) Dos sucesos son incompatibles cuando tienen intersección vacía. Entonces, si A y B fuesen incompatibles se tendría que $A\cap B=\varnothing$ y entonces $P(A\cap B)=P(\varnothing)=0$, pero esto no es cierto porque $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)=0,6\cdot 0,5=0,3$. De todo lo anterior se deduce que A y B no son incompatibles.

   Hay otra forma de hacer este apartado.

   Uno de los axiomas de la probabilidad no dice que si dos sucesos A y B son incompatibles, entonces $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

   Pero es que, en este caso, $P(A\cup B)=0,8$ y $P(A)+P(B)=0,6+0,5=1,1$. Esto nos indica que $P(A\cup B)\neq P(A)+P(B)$ y que, por tanto, A y B no son incompatibles.

6. Una granja avícola dedicada a la producción de huevos posee un sistema automático de clasificación en tres calibres según su peso: grande, mediano y pequeño. Se conoce que el 40 % de la producción es clasificada como huevos grandes, el 35 % como medianos y el 25 % restante como pequeños. Además, se sabe que este sistema de clasificación produce defectos por rotura en el cascarón que dependen del peso. Así, la probabilidad de que un huevo grande sea defectuoso por esta razón es del 5 %, la de uno mediano del 3 % y de un 2 % la de uno pequeño. Elegido aleatoriamente un huevo,

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea defectuoso?

   b) Si el huevo es defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que sea grande?

   Solución

   Llamemos G al suceso “el huevo es grande”, M al suceso “el huevo es mediano” y P al suceso “el huevo es pequeño”. Llamemos también D al suceso “el huevo es defectuoso”. Entonces $P(G)=0,4$; $P(M)=0,35$;

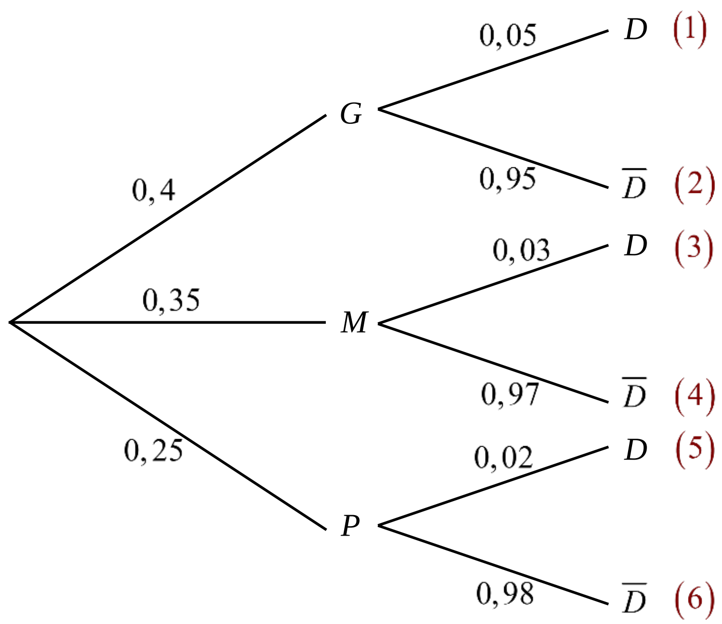
$P(P)=0,25$; $P(D/G)=0,05$; $P(\overline{D}/G)=0,95$; $P(D/M)=0,03$; $P(\overline{D}/M)=0,97$;
$P(D/P)=0,02$; $P(\overline{D}/P)=0,98$.

a) Por el teorema de la probabilidad total:

$$P(D)=P(G\cap D)+P(M\cap D)+P(P\cap D)=$$
$$=P(G)\cdot P(D/G)+P(M)\cdot P(D/M)+P(P)\cdot P(D/P)=$$
$$=0,4\cdot 0,05+0,35\cdot 0,03+0,25\cdot 0,02=0,02+0,0105+0,005=0,0355.$$

b) $P(G/D)=\dfrac{P(G\cap D)}{P(D)}=\dfrac{P(G)\cdot P(D/G)}{P(D)}=\dfrac{0,4\cdot 0,05}{0,0355}=\dfrac{0,02}{0,0355}=0,5634$.

Vamos a hacer el problema usando un diagrama de árbol.



a) $P(D)=(1)+(3)+(5)=0,4\cdot 0,05+0,35\cdot 0,03+0,25\cdot 0,02=0,02+0,0105+0,005=0,0355$.

b) $P(G/D)=\dfrac{P(G\cap D)}{P(D)}=\dfrac{(1)}{P(D)}=\dfrac{0,4\cdot 0,05}{0,0355}=\dfrac{0,02}{0,0355}=0,5634$.

7. A la Junta General de Accionistas de una empresa asisten 105 accionistas de los cuales 45 tienen menos de 40 años y 18 más de 60 años. Sometida a votación una propuesta, es rechazada por la tercera parte de los menores de 40 años, por la tercera parte de los que están entre 40 y 60 años y por 4 personas mayores de 60 años; los demás la aceptan.

   a) Calcule la probabilidad de que, elegida una persona al azar, tenga menos de 40 años y haya aceptado la propuesta.

   b) La prensa afirmó que la propuesta había sido aceptada por el 80 % de los asistentes, ¿es correcta la afirmación?

   c) Si una persona escogida al azar ha rechazado la propuesta, ¿qué probabilidad hay de que tenga más de 60 años?

Solución

Para hacer este problema vamos a confeccionar una tabla que contenga todos los datos.

	Menos de 40 años	Entre 40 y 60 años	Más de 60 años	Total
Propuesta rechazada	15	14	4	33
Propuesta aceptada	30	28	14	72
Total	45	42	18	105

Llamemos R al suceso "rechazar la propuesta" y llamemos A al suceso "aceptar la propuesta". Llamemos también -40 al suceso "tener menos de 40 años", $40;60$ al suceso "tener entre 40 y 60 años" y $+60$ al suceso "tener más de 60 años". Ahora podemos aplicar la regla de Laplace para contestar a cada uno de los apartados.

a) $P(-40 \cap A) = \frac{30}{105} = \frac{2}{7} = 0,2857$.

b) La probabilidad de aceptar la propuesta es $P(A) = \frac{72}{105} = \frac{24}{35} = 0,6857$, lo que supone el 68,57 % de la Junta General de Accionistas. Por tanto, la afirmación de la prensa no es correcta.

c) $P(+60 / R) = \frac{4}{33} = 01212$.

8. El 55 % de los alumnos de un centro docente utiliza en su desplazamiento transporte público, el 30 % usa vehículo propio y el resto va andando. El 65 % de los que utilizan transporte público son mujeres, el 70 % de los que usan vehículo propio son hombres y el 52 % de los que van andando son mujeres.

a) Elegido al azar un alumno de ese centro, calcule la probabilidad de que sea hombre.

b) Elegido al azar un hombre, alumno de ese centro, ¿cuál es la probabilidad de que vaya andando?

Solución

Llamemos T al suceso "utilizar transporte público", V al suceso "usar vehículo propio" y A al suceso "ir andando". Entonces $P(T) = 0,55$; $P(V) = 0,3$ y $P(A) = 0,15$. Llamemos también M al suceso "ser mujer" y H al suceso "ser hombre". Entonces $P(M / T) = 0,65$; $P(H / T) = 0,35$; $P(M / V) = 0,3$; $P(H / V) = 0,7$; $P(M / A) = 0,52$; $P(H / A) = 0,48$.

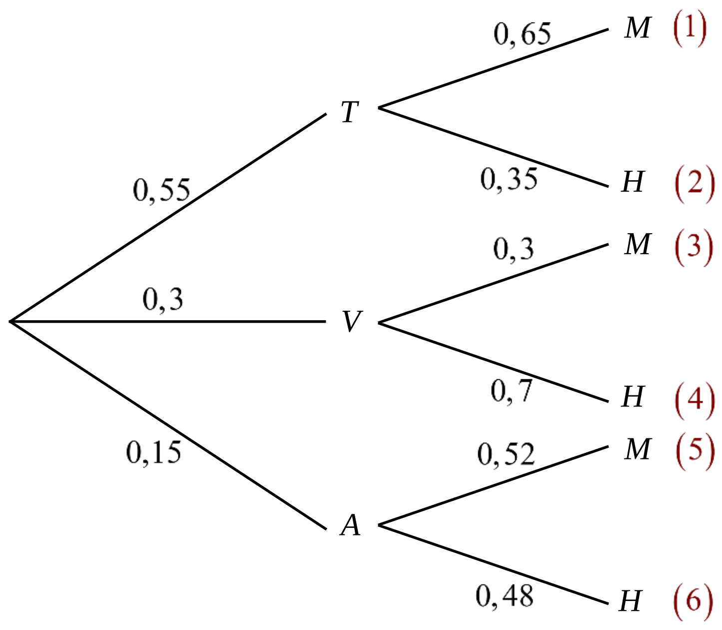
a) Por el teorema de la probabilidad total: $P(H) = P(T \cap H) + P(V \cap H) + P(A \cap H) =$

$$= P(T) \cdot P(H / T) + P(V) \cdot P(H / V) + P(A) \cdot P(H / A) = 0,55 \cdot 0,35 + 0,3 \cdot 0,7 + 0,15 \cdot 0,48 =$$

$$= 0,1925 + 0,21 + 0,072 = 0,4745.$$

b) $P(A / H) = \frac{P(A \cap H)}{P(H)} = \frac{P(A) \cdot P(H / A)}{P(H)} = \frac{0,15 \cdot 0,48}{0,4745} = \frac{0,072}{0,4745} = 0,1517$.

Vamos a hacer también el problema usando un diagrama de árbol.



a) $P(H)=(2)+(4)+(6)=0,55\cdot 0,35+0,3\cdot 0,7+0,15\cdot 0,48=0,1925+0,21+0,072=0,4745$.

b) $P(A/H)=\dfrac{P(A\cap H)}{P(H)}=\dfrac{(6)}{P(H)}=\dfrac{0,15\cdot 0,48}{0,4745}=\dfrac{0,072}{0,4745}=0,1517$.

9. Un estudio estadístico de la producción de una fábrica de batidoras determina que el 4,5 % de las batidoras presenta defectos eléctricos, el 3,5 % presenta defectos mecánicos y el 1 % presenta ambos defectos. Se escoge al azar una batidora.

a) Calcular la probabilidad de que no tenga ninguno de los dos defectos.

b) Calcular la probabilidad de que tenga un defecto mecánico sabiendo que tiene un defecto eléctrico.

c) Justificar si los sucesos "tener un defecto eléctrico" y "tener un defecto mecánico" son independientes. ¿Son incompatibles?

Solución

Llamemos E al suceso "presentar defectos eléctricos" y M al suceso "presentar defectos mecánicos". Entonces $P(E)=0,045$; $P(M)=0,035$ y $P(E\cap M)=0,01$.

a) $P(\overline{E}\cap\overline{M})=P(\overline{E\cup M})=1-P(E\cup M)=1-\left[P(E)+P(M)-P(E\cap M)\right]=$

$1-(0,045+0,035-0,01)=1-0,07=0,93$.

b) $P(M/E)=\dfrac{P(M\cap E)}{P(E)}=\dfrac{0,01}{0,045}=0,222$.

c) Para que dos sucesos sean incompatibles no deben tener nada en común, es decir, su intersección ha de ser el conjunto vacío, con lo que, en ese caso, $P(E\cap M)=P(\varnothing)=0$. Pero $P(E\cap M)=0,01$. De aquí deducimos que los sucesos "tener un defecto eléctrico" y "tener un defecto mecánico" no son incompatibles.

Puesto que $P(E)\cdot P(M)=0,045\cdot 0,035=0,001575\neq 0,01=P(E\cap M)$, deducimos también que los sucesos "tener un defecto eléctrico" y "tener un defecto mecánico" tampoco son independientes.

10. En un servicio técnico especializado en cámaras fotográficas, el 70 % de las cámaras que se reciben son del modelo A y el resto del modelo B. El 95 % de las cámaras del modelo A son reparadas, mientras que del modelo B sólo se reparan el 80 %. Si se elige una cámara al azar:

a) Calcular la probabilidad de que no se haya podido reparar.

b) Si se observa que no ha sido reparada, ¿cuál es la probabilidad de que sea del modelo B?

Solución

Llamemos A al suceso "recibir cámara del modelo A" y B al suceso "recibir cámara del modelo B". Llamemos también R al suceso "la máquina ha sido reparada". Entonces sabemos las siguientes probabilidades:

$P(A)=0,7$; $P(B)=0,3$; $P(R/A)=0,95$; $P(\overline{R}/A)=0,05$; $P(R/B)=0,8$ y $P(\overline{R}/B)=0,2$

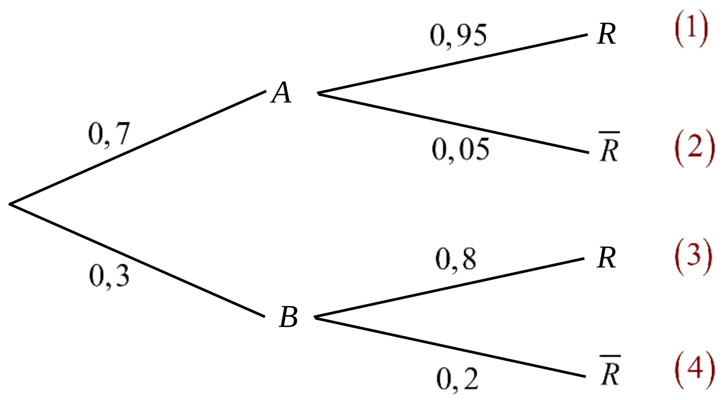
a) Por el teorema de la probabilidad total:

$$P(R)=P(A\cap R)+P(B\cap R)=P(A)\cdot P(R/A)+P(B)\cdot P(R/B)=$$
$$=0,7\cdot 0,95+0,3\cdot 0,8=0,665+0,24=0,905.$$

Entonces $P(\overline{R})=1-P(R)=1-0,905=0,095$.

b) $P(B/\overline{R})=\dfrac{P(B\cap\overline{R})}{P(\overline{R})}=\dfrac{P(B)\cdot P(\overline{R}/B)}{P(\overline{R})}=\dfrac{0,3\cdot 0,2}{0,095}=\dfrac{0,06}{0,095}=0,6316$.

Podemos resolver este problema haciendo uso directamente de un diagrama de árbol:



a) $P(\overline{R})=(2)+(4)=0,7\cdot 0,05+0,3\cdot 0,2=0,07+0,06=0,095$.

b) $P(B/\overline{R})=\dfrac{P(B\cap\overline{R})}{P(\overline{R})}=\dfrac{(4)}{P(\overline{R})}=\dfrac{0,3\cdot 0,2}{0,095}=\dfrac{0,06}{0,095}=0,6316$.

11. Se elige un número, al azar, entre el siguiente conjunto:

$$\{225,\ 201,\ 162,\ 210,\ 180,\ 172,\ 156,\ 193,\ 218,\ 167,\ 176,\ 222,\ 215,\ 120,\ 190,\ 171\}$$

a) Calcular la probabilidad de que el número elegido sea impar.

b) Si el número elegido es múltiplo de 5, ¿cuál es la probabilidad de que sea mayor que 200?

c) Determine si son independientes los sucesos S: "el número elegido es mayor que 200" y T: "el número elegido es par".

d) Hallar la probabilidad del suceso $S\cup T$.

Solución

a) $P(\text{impar})=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}=0,375$.

b) El conjunto de los múltiplos de 5 es $\{225,\ 210,\ 180,\ 215,\ 120,\ 190\}$. De entre estos, la probabilidad de ser mayor que 200 es $P(\text{mayor que } 200)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}=0,5$.

c) $S=\{225,\ 201,\ 210,\ 218,\ 222,\ 215\}$, $T=\{162,\ 210,\ 180,\ 172,\ 156,\ 218,\ 176,\ 222,\ 120,\ 190\}$,

$S\cap T=\{210,\ 218,\ 222\}$. Entonces, $P(S)=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$; $P(T)=\frac{10}{16}=\frac{5}{8}$; $P(S\cap T)=\frac{3}{16}$.

Como $P(S)\cdot P(T)=\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{8}=\frac{15}{64}\neq\frac{3}{16}=P(S\cap T)$ los sucesos S: “el número elegido es mayor que 200” y T: “el número elegido es par” no son independientes.

d) $P(S\cup T)=P(S)+P(T)-P(S\cap T)=\frac{3}{8}+\frac{5}{8}-\frac{3}{16}=\frac{6+10-3}{16}=\frac{13}{16}=0,8125$.

12. El 65 % de la población española adulta no fuma, el 15 % fuma ocasionalmente y el resto fuma habitualmente. Elegidos al azar dos adultos españoles, calcule las probabilidades de los siguientes sucesos:

a) Los dos sean no fumadores.

b) Uno de ellos sea no fumador y el otro sea fumador ocasional.

Solución

Llamemos A al suceso “no fumar”, B al suceso “fumar ocasionalmente” y C al suceso “fumar habitualmente”. Entonces el enunciado nos proporciona las siguientes probabilidades: $P(A)=0,65$; $P(B)=0,15$ y $P(C)=0,2$. Para poder hacer este problema hemos de suponer que los tres sucesos son independientes, es decir, que lo que haga un individuo no influye o es independiente de lo que haga otro.

Vamos a notar también con subíndices el número del adulto que se elige. Así, por ejemplo, A_1 significará “el adulto elegido en primer lugar no fuma”, B_2 será “el adulto elegido en segundo lugar fuma ocasionalmente”, y así sucesivamente.

a) $P(A_1\cap A_2)=P(A_1)\cdot P(A_2)=0,65\cdot 0,65=0,4225$.

b) $P(A_1\cap B_2)+P(A_2\cap B_1)=P(A_1)\cdot P(B_2)+P(A_2)\cdot P(B_1)=$

$=0,65\cdot 0,15+0,65\cdot 0,15=0,0975+0,0975=0,195$.

También se puede recurrir a un diagrama de árbol para hacer este problema, pero la independencia de los sucesos hace que sea fácil reducir la independencia al producto de probabilidades.

13. Se sabe que el 80 % de los visitantes de un determinado museo son andaluces y que el 55 % son andaluces y adultos. Además, el 17 % de los visitantes son no andaluces y adultos. Se elige, al azar, un visitante del museo:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que no sea adulto?

b) Si es adulto, ¿cuál es la probabilidad de que sea andaluz?

Solución

Llamemos A al suceso “ser andaluz” y B al suceso “ser adulto”. Entonces $P(A)=0,8$; $P(A\cap B)=0,55$ y $P(\overline{A}\cap B)=P(B\cap\overline{A})=P(B-A)=0,17$.

a) Puesto que $P(B-A)=P(B)-P(B\cap A)$, sustituyendo tenemos: $0{,}17=P(B)-0{,}55\Rightarrow$

$\Rightarrow P(B)=0{,}17+0{,}55=0{,}72$. Entonces $P(\overline{B})=1-P(B)=1-0{,}72=0{,}28$.

b) $P(A/B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{0{,}55}{0{,}72}=0{,}76$.

14. El 25 % de los estudiantes de una Universidad lee las noticias en prensa escrita en papel, el 70 % en prensa digital y el 10 % en ambos formatos. Elegido, al azar, un estudiante de esa Universidad:

a) Calcular la probabilidad de que lea las noticias en formato papel o digital.

b) Sabiendo que lee las noticias en prensa digital, calcule la probabilidad de que también las lea en prensa escrita en papel.

c) ¿Cuál es la probabilidad de que lea las noticias exclusivamente en uno de los dos formatos?

Solución

Llamemos A al suceso "leer las noticias en prensa escrita en papel" y B al suceso "leer las noticias en prensa digital". Entonces $P(A)=0{,}25$; $P(B)=0{,}7$ y $P(A\cap B)=0{,}1$.

a) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0{,}25+0{,}7-0{,}1=0{,}85$.

b) $P(A/B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{0{,}1}{0{,}7}=0{,}143$.

c) $P\left[\left(A\cap\overline{B}\right)\cup\left(B\cap\overline{A}\right)\right]=P\left(A\cap\overline{B}\right)+P\left(B\cap\overline{A}\right)=P(A-B)+P(B-A)=$

$=P(A)-P(A\cap B)+P(B)-P(B\cap A)=0{,}25-0{,}1+0{,}7-0{,}1=0{,}75$.

15. Una urna, A, contiene siete bolas numeradas del 1 al 7. Otra urna, B, contiene cinco bolas numeradas del 1 al 5. Lanzamos una moneda equilibrada, de forma que, si sale cara, extraeremos una bola de la urna A, y, si sale cruz, la extraemos de la urna B. Calcular las probabilidades de los siguientes sucesos:

a) "La bola haya sido extraída de la urna A y el número sea par".

b) "El número de la bola extraída sea par".

c) "La bola sea de la urna A, si ha salido un número par".

Solución

Llamemos A al suceso "extraer bola de la urna A" y B al suceso "extraer bola de la urna B". Está claro que, como las probabilidades de salir cara y salir cruz al lanzar una moneda son las mismas, e iguales a "un medio", se tiene que $P(A)=P(B)=\dfrac{1}{2}$. Llamaremos también P al suceso "salir par". Entonces, también está claro, por la forma en que están compuestas las urnas, que $P(P/A)=\dfrac{3}{7}$ y $P(P/B)=\dfrac{2}{5}$.

a) $P(A\cap P)=P(A)\cdot P(P/A)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{7}=\dfrac{3}{14}=0{,}2143$.

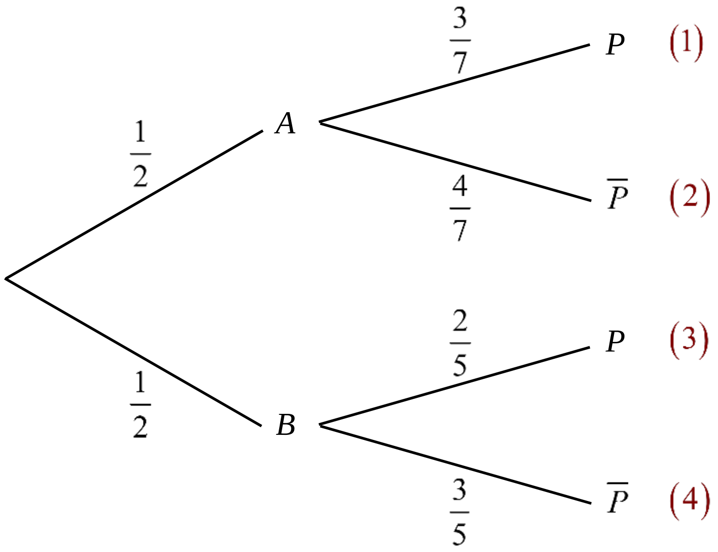
b) Por el teorema de la probabilidad total:

$P(P)=P(A\cap P)+P(B\cap P)=P(A)\cdot P(P/A)=P(B)\cdot P(P/B)=$

$=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{7}+\dfrac{1}{\cancel{2}}\cdot\dfrac{\cancel{2}}{5}=\dfrac{3}{14}+\dfrac{1}{5}=\dfrac{15+14}{70}=\dfrac{29}{70}=0{,}414$.

c) $P(A/P)=\dfrac{P(A\cap P)}{P(P)}=\dfrac{\frac{3}{14}}{\frac{29}{70}}=\dfrac{210}{406}=\dfrac{15}{29}=0,517$.

Usemos un diagrama de árbol para hacer este mismo problema.



a) $P(A\cap P)=(1)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{7}=\dfrac{3}{14}=0,2143$.

b) $P(P)=(1)+(3)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{7}+\dfrac{1}{\cancel{2}}\cdot\dfrac{\cancel{2}}{5}=\dfrac{3}{14}+\dfrac{1}{5}=\dfrac{15+14}{70}=\dfrac{29}{70}=0,414$.

c) $P(A/P)=\dfrac{P(A\cap P)}{P(P)}=\dfrac{(1)}{(1)+(3)}=\dfrac{\frac{3}{14}}{\frac{29}{70}}=\dfrac{210}{406}=\dfrac{15}{29}=0,517$.

16. Antonio va a la compra dos días de cada cinco. A lo largo del tiempo, ha observado que la fruta está de oferta la tercera parte de los días que va a la compra y la mitad de los días que no va. Elegido un día al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la fruta esté de oferta ese día?

b) Calcular la probabilidad de que ese día Antonio vaya a la compra o la fruta esté de oferta.

Solución

Sea C el suceso “ir a la compra”. Entonces $P(C)=\dfrac{2}{5}=0,4$ y $P(\overline{C})=\dfrac{3}{5}=0,6$. Llamemos también F al suceso “la fruta está de oferta”. Entonces $P(F/C)=\dfrac{1}{3}$ y $P(F/\overline{C})=\dfrac{1}{2}$.

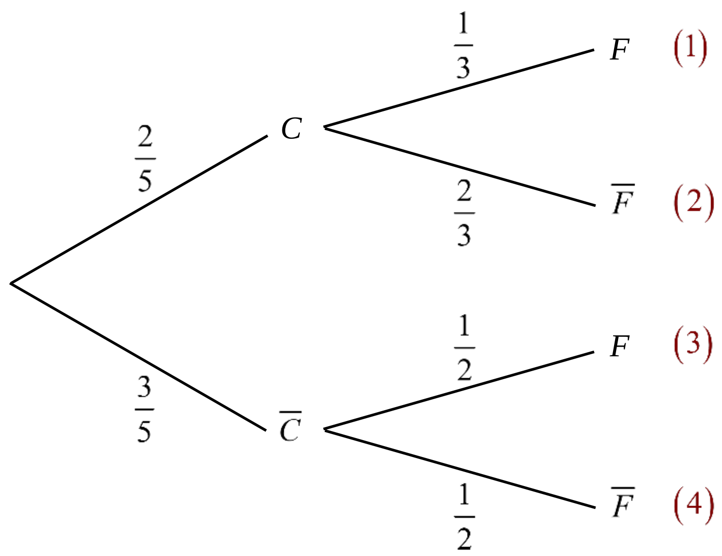
a) Por el teorema de la probabilidad total:

$$P(F)=P(C\cap F)+P(\overline{C}\cap F)=P(C)\cdot P(F/C)+P(\overline{C})\cdot P(F/\overline{C})=$$
$$=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3}+\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{2}{15}+\frac{3}{10}=\frac{4}{30}+\frac{9}{30}=\frac{13}{30}=0,433.$$

b) $P(C\cup F)=P(C)+P(F)-P(C\cap F)=P(C)+P(F)-P(C)\cdot P(F/C)=$

$$=\frac{2}{5}+\frac{13}{30}-\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{5}+\frac{13}{30}-\frac{2}{15}=\frac{12}{30}+\frac{13}{30}-\frac{4}{30}=\frac{21}{60}=\frac{7}{20}=0,35.$$

Hagamos el apartado a) usando un diagrama de árbol.



a) $P(F)=(1)+(3)=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3}+\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{2}{15}+\frac{3}{10}=\frac{4}{30}+\frac{9}{30}=\frac{13}{30}=0,433$.

17. Se sabe que dos alumnos de la asignatura de Matemáticas asisten a clase, de forma independiente, el primero a un 85 % de las clases y el segundo a un 35 %. Tomado al azar un día de clase, calcule la probabilidad de cada uno de los siguientes sucesos:

a) Que los dos hayan asistido a clase ese día.

b) Que alguno de ellos haya asistido a clase ese día.

c) Que ninguno haya asistido a clase ese día.

d) Que haya asistido a clase el segundo, sabiendo que el primero no ha asistido.

Solución

Llamemos A al suceso "que el primer alumno asista a clase" y B al suceso al suceso "que el segundo alumno asista a clase". Entonces $P(A)=0,85$ y $P(B)=0,35$.

a) Puesto que los dos sucesos son independientes: $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)=0,85\cdot 0,35=0,2975$.

b) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0,85+0,35-0,2975=0,9025$.

c) Si A y B son independientes, también lo son los sucesos contrarios $\overline{A}$ y $\overline{B}$. Entonces:

$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})=(1-P(A))\cdot(1-P(B))=0,15\cdot 0,65=0,0975.$$

d) $P(B/\overline{A})=\frac{P(B\cap\overline{A})}{P(\overline{A})}=\frac{P(B-A)}{1-P(A)}=\frac{P(B)-P(B\cap A)}{1-P(A)}=\frac{0,35-0,2975}{1-0,85}=\frac{0,0525}{0,15}=0,35$.

18. En una tienda de complementos disponen de 100 bolsos, de los cuales 80 son de una conocida marca y 20 son imitaciones casi perfectas de dicha marca. Una inspección encarga a un experto el peritaje de los bolsos de la tienda. Se sabe que este experto acierta en el 95 % de sus peritajes cuando el bolso es auténtico y que detecta el 9 8% de las imitaciones. Se elige, al azar, un bolso para su examen:

a) Calcular la probabilidad de que el experto acierte en su dictamen sobre ese bolso.

b) Si el experto no ha acertado en su peritaje, calcule la probabilidad de que el bolso sea auténtico.

Solución

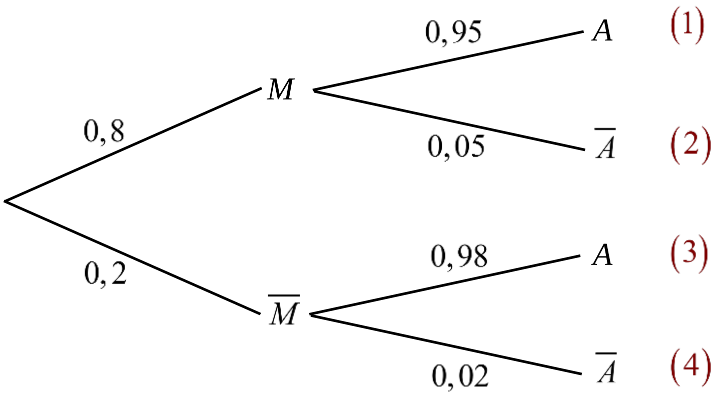
Sean M el suceso "el bolso es de una conocida marca" y A el suceso "acertar con el peritaje de un bolso". El enunciado proporciona las siguientes probabilidades: $P(M)=\dfrac{80}{100}=0,8$; $P(\overline{M})=0,2$; $P(A/M)=0,95$; $P(\overline{A}/M)=0,05$; $P(A/\overline{M})=0,98$ y $P(\overline{A}/\overline{M})=0,02$.

a) Por el teorema de la probabilidad total:

$$P(A)=P(M\cap A)+P(\overline{M}\cap A)=P(M)\cdot P(A/M)+P(\overline{M})\cdot P(A/\overline{M})=$$
$$=0,8\cdot 0,95+0,2\cdot 0,98=0,76+0,196=0,956.$$

b) $P(M/\overline{A})=\dfrac{P(M\cap\overline{A})}{P(\overline{A})}=\dfrac{P(M)\cdot P(\overline{A}/M)}{1-P(A)}=\dfrac{0,8\cdot 0,05}{1-0,956}=\dfrac{0,04}{0,044}=0,909$.

Resolución haciendo uso de un diagrama de árbol.



a) $P(A)=(1)+(3)=0,8\cdot 0,95+0,2\cdot 0,98=0,76+0,196=0,956$.

b) $P(M/\overline{A})=\dfrac{P(M\cap\overline{A})}{P(\overline{A})}=\dfrac{(2)}{1-P(A)}=\dfrac{(2)}{1-0,956}=\dfrac{0,04}{0,044}=0,909$.

19. Un ilusionista tiene seis cartas: cuatro ases y dos reyes. Saca una carta, la enseña al público y, sin verla, la vuelve a mezclar con las demás. A continuación, saca una segunda carta que resulta ser un as. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera carta haya sido también un as? Si el ilusionista no devolviera la primera carta a la baraja y la segunda carta extraída fuera un as, ¿cuál es la probabilidad de que la primera carta haya sido también un as?

Solución

Llamemos A al suceso "salir as" y R al suceso "salir rey". Denotaremos con subíndices la posición en que sale la carta. Por ejemplo A_1 significará que la primera carta que ha salido es un as. El enunciado del problema nos permite saber que $P(A_1)=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$ y que $P(R_1)=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$.

En el caso de que haya devolución de la carta que se ha sacado ocurre que $P(A_2/A_1)=P(A_2/R_1)=\dfrac{2}{3}$, y que $P(R_2/A_1)=P(R_2/R_1)=\dfrac{1}{3}$. En este caso, esto quiere decir que no importa lo que haya salido en la primera carta; las probabilidades de que la segunda carta sea un as o un rey siguen siendo las mismas de que la primera carta sea un as o un rey.

En el caso de que no haya devolución de la carta que se ha sacado ocurre que $P(A_2/A_1)=\frac{3}{5}$; $P(A_2/R_1)=\frac{4}{5}$ y que $P(R_2/A_1)=\frac{2}{5}$; $P(R_2/R_1)=\frac{1}{5}$

Si la segunda carta que ha salido es un as, la probabilidad de que la primera carta haya sido también un as es

$$P(A_1/A_2)=\frac{P(A_1\cap A_2)}{P(A_2)}=\frac{P(A_1\cap A_2)}{P(A_1\cap A_2)+P(R_1\cap A_2)}=\frac{P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)}{P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)+P(R_1)\cdot P(A_2/R_1)}=$$

$$=\frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}}=\frac{\frac{4}{9}}{\frac{4}{9}+\frac{2}{9}}=\frac{\frac{4}{9}}{\frac{6}{9}}=\frac{4\cdot\cancel{9}}{\cancel{9}\cdot 6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$$

Esto es una aplicación del teorema de Bayes, pero se podría haber hecho mucho más rápido ya que, al haber devolución o reemplazamiento de la carta hemos visto que los sucesos son independientes, con lo que podríamos haberlo hecho así $P(A_2/A_1)=P(A_1/A_2)=P(A_1)=P(A_2)=\frac{2}{3}$.

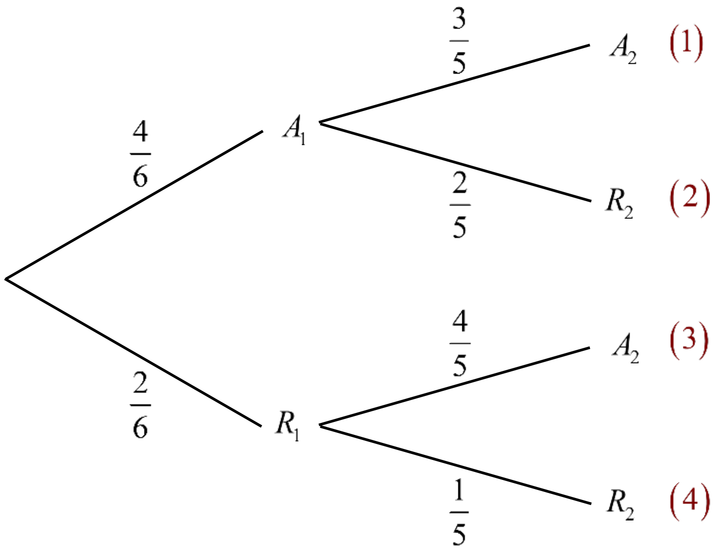
Sin embargo, en el caso de que no haya devolución de la carta, la cosa cambia:

$$P(A_1/A_2)=\frac{P(A_1\cap A_2)}{P(A_2)}=\frac{P(A_1\cap A_2)}{P(A_1\cap A_2)+P(R_1\cap A_2)}=\frac{P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)}{P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)+P(R_1)\cdot P(A_2/R_1)}=$$

$$=\frac{\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}}{\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}+\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{5}}=\frac{\frac{12}{30}}{\frac{12}{30}+\frac{8}{30}}=\frac{\frac{12}{30}}{\frac{20}{30}}=\frac{12\cdot\cancel{30}}{\cancel{30}\cdot 20}=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}.$$

Observemos también que el suceso “la segunda carta sea una as” (cuya probabilidad aparece en el denominador) es lo mismo que “la primera carta sea un as y la segunda cartas sea un as”, o bien que “la primera carta sea un rey y la segunda sea un as”. Por eso $P(A_2)=P(A_1\cap A_2)+P(R_1\cap A_2)$ (probabilidad total).

Esta última parte en que no hay devolución se entiende mucho mejor si se elabora un diagrama de árbol:



$$P(A_1/A_2)=\frac{P(A_1\cap A_2)}{P(A_2)}=\frac{(1)}{(1)+(3)}==\frac{\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}}{\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}+\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{5}}=\frac{\frac{12}{30}}{\frac{12}{30}+\frac{8}{30}}=\frac{\frac{12}{30}}{\frac{20}{30}}=\frac{12\cdot\cancel{30}}{\cancel{30}\cdot 20}=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}.$$

La primera parte también se puede hacer con un diagrama, lo que ocurre es que las probabilidades de la segunda ramificación son exactamente las mismas que las de la primera (ya que hay devolución de la carta).

20. El 30 % de los habitantes de una ciudad lee el diario A, el 13 % el diario B, y el 6 % ambos diarios.

    a) ¿Qué porcentaje de habitantes de esta ciudad no lee ninguno de los diarios?

    b) Si se elige al azar un habitante de esta ciudad de entre los no lectores del diario B, ¿cuál es la probabilidad de que lea el diario A?

Solución

Sean A y B, “leer el diario A” y “leer el diario B”. Entonces $P(A)=0,3$; $P(B)=0,13$ y $P(A\cap B)=0,06$.

a) $P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=P\left(\overline{A\cup B}\right)=1-P(A\cup B)=1-\left[P(A)+P(B)-P(A\cap B)\right]=$

$=1-(0,3+0,13-0,06)=1-0,37=0,63$.

b) $P\left(A/\overline{B}\right)=\dfrac{P\left(A\cap\overline{B}\right)}{\left(\overline{B}\right)}=\dfrac{P(A-B)}{1-P(B)}=\dfrac{P(A)-P(A\cap B)}{1-P(B)}=\dfrac{0,3-0,06}{1-0,13}=\dfrac{0,24}{0,87}=0,276$.

21. El 70 % de los clientes de un supermercado realizan las compras en el local y el resto de los clientes las realizan por internet. De las compras realizadas en el local, sólo el 30 % supera los 100 €, mientras que de las realizadas por internet el 80 % supera esa cantidad.

    a) Elegida una compra al azar, ¿cuál es la probabilidad de que supere los 100 €?

    b) Si se sabe que una compra supera los 100 €, ¿cuál es la probabilidad de que se haya hecho en el local?

Solución

Llamemos L al suceso “realizar las compras en el local” y llamemos I al suceso “realizar las compras por internet”. Llamemos también C al suceso “la compra supera los 100 €”. Entonces $P(L)=0,7$; $P(I)=0,3$; $P(C/L)=0,3$; $P\left(\overline{C}/L\right)=0,7$; $P(C/I)=0,8$; $P\left(\overline{C}/I\right)=0,2$.

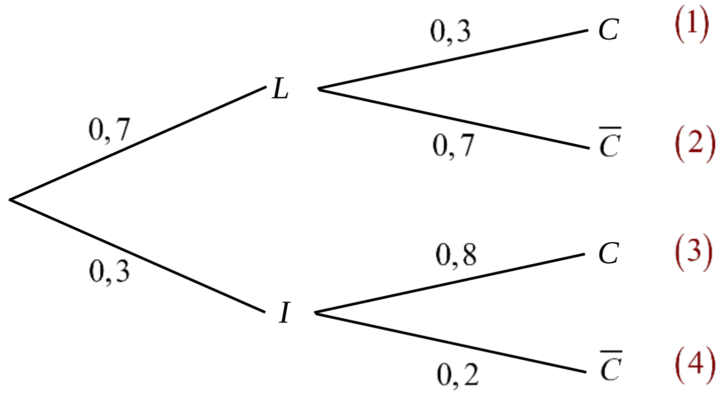
a) Por el teorema de la probabilidad total:

$P(C)=P(L\cap C)+P(I\cap C)=P(L)\cdot P(C/L)+P(I)\cdot P(C/I)=$

$=0,7\cdot 0,3+0,3\cdot 0,8=0,21+0,24=0,45$.

b) $P(L/C)=\dfrac{P(L\cap C)}{P(C)}=\dfrac{P(L)\cdot P(C/L)}{P(C)}=\dfrac{0,7\cdot 0,3}{0,45}=\dfrac{0,21}{0,45}=0,0945$.

Hagamos también el problema usando un diagrama de árbol.



a) $P(C)=(1)+(3)=0,7\cdot 0,3+0,3\cdot 0,8=0,21+0,24=0,45$.

b) $P(L/C)=\dfrac{P(L\cap C)}{P(C)}=\dfrac{(1)}{P(C)}=\dfrac{0,7\cdot 0,3}{0,45}=\dfrac{0,21}{0,45}=0,0945$.

22. Lucía quiere ir de vacaciones a la costa. En su guía de viajes lee que en esa época del año llueve dos días a la semana y que hace viento el 25 % de los días que llueve y el 40 % de los días que no llueve. Elegido un día de esa época,

a) ¿Cuál es la probabilidad de que haga viento?

b) Si hace viento, ¿cuál es la probabilidad de que esté lloviendo?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que no llueva y no haga viento?

Solución

Llamemos L al suceso "llover en esa época del año" y V al suceso "hacer viento en esa época del año". Entonces: $P(L)=\dfrac{2}{7}$; $P(\overline{L})=\dfrac{5}{7}$; $P(V/L)=\dfrac{1}{4}$; $P(\overline{V}/L)=\dfrac{3}{4}$; $P(V/\overline{L})=\dfrac{4}{10}=\dfrac{2}{5}$ y $P(\overline{V}/\overline{L})=\dfrac{3}{5}$.

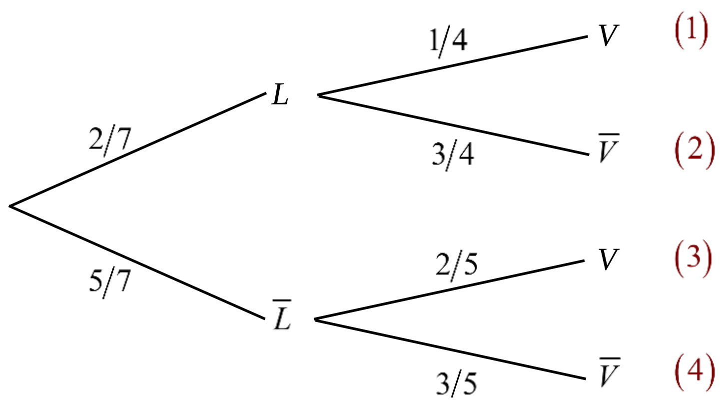
a) Por el teorema de la probabilidad total:

$$P(V)=P(L\cap V)+P(\overline{L}\cap V)=P(L)\cdot P(V/L)+P(\overline{L})\cdot P(V/\overline{L})=$$
$$=\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{4}+\frac{5}{7}\cdot\frac{2}{5}=\frac{2}{28}+\frac{10}{35}=\frac{1}{14}+\frac{2}{7}=\frac{1}{14}+\frac{4}{14}=\frac{5}{14}=0,357.$$

b) $P(L/V)=\dfrac{P(L\cap V)}{P(V)}=\dfrac{P(L)\cdot P(V/L)}{P(V)}=\dfrac{\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{4}}{\frac{5}{14}}=\dfrac{14\cdot 2}{7\cdot 4\cdot 5}=\dfrac{1}{5}=0,2$.

c) $P(\overline{L}\cap\overline{V})=P(\overline{L})\cdot P(\overline{V}/\overline{L})=\dfrac{5}{7}\cdot\dfrac{3}{5}=\dfrac{3}{7}=0,42857$.

Resolución haciendo uso de un diagrama de árbol.



a) $P(V)=(1)+(3)==\dfrac{2}{7}\cdot\dfrac{1}{4}+\dfrac{5}{7}\cdot\dfrac{2}{5}=\dfrac{2}{28}+\dfrac{10}{35}=\dfrac{1}{14}+\dfrac{2}{7}=\dfrac{1}{14}+\dfrac{4}{14}=\dfrac{5}{14}=0,357$.

b) $P(L/V)=\dfrac{P(L\cap V)}{P(V)}=\dfrac{(1)}{P(V)}=\dfrac{\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{4}}{\frac{5}{14}}=\dfrac{14\cdot 2}{7\cdot 4\cdot 5}=\dfrac{1}{5}=0,2$.

c) $P(\overline{L}\cap\overline{V})=(4)=\dfrac{5}{7}\cdot\dfrac{3}{5}=\dfrac{3}{7}=0,42857$.

23. En una urna A hay 8 bolas verdes y 6 rojas. En otra urna B hay 4 bolas verdes, 5 rojas y 1 negra. Se lanza un dado, si sale un número menor que 3 se saca una bola de la urna A, y si sale mayor o igual que 3 se saca una bola de la urna B.

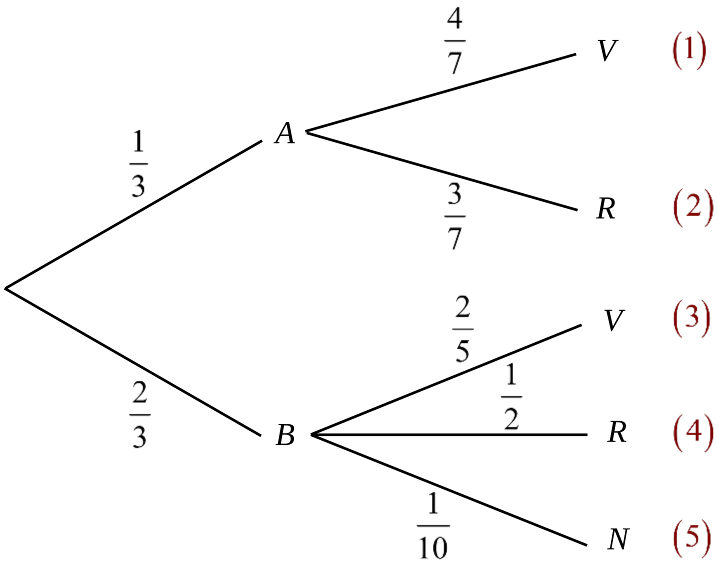
   a) Calcular la probabilidad de que la bola sea verde si ha salido un 4.

   b) Calcular la probabilidad de que la bola elegida sea roja.

   c) Sabiendo que ha salido una bola verde, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la urna A?

Solución

Usaremos el siguiente diagrama de árbol para resolver el problema.



Hemos llamado V al suceso "salir bola verde", R al suceso "salir bola roja" y N al suceso "salir bola negra". También hemos llamado A al suceso "elegir la urna A" y B al suceso, "elegir la urna B". Evidentemente, $P(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ y $P(B)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$; ya que la urna A se elige cuando en el dado sale menor que 3 (salir 1 o 2) y en caso contrario (salir 3, 4, 5 o 6) se elige la urna B. El resto de probabilidades que figuran en el diagrama son fáciles de deducir dada la composición de las urnas.

   a) La probabilidad de que la bola sea verde si ha salido un 4 es la misma que la de salir bola verde si la urna elegida es la B (porque 4 no es menor que 3). Por tanto, $P(V/B)=\frac{2}{5}$.

   b) $P(R)=(2)+(4)=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{7}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{7}+\frac{1}{3}=\frac{3+7}{21}=\frac{10}{21}=0,476$.

   c) $P(A/V)=\dfrac{P(A\cap V)}{P(V)}=\dfrac{(1)}{(1)+(3)}=\dfrac{\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{7}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{7}+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}}=\dfrac{\frac{4}{21}}{\frac{4}{21}+\frac{4}{15}}=\dfrac{\frac{4}{21}}{\frac{16}{35}}=\dfrac{4\cdot 35}{21\cdot 16}=\dfrac{\cancel{4}\cdot\cancel{7}\cdot 5}{3\cdot\cancel{7}\cdot\cancel{4}\cdot 4}=\dfrac{5}{12}=0,42$.

24. De los 700 alumnos matriculados en una asignatura, 210 son hombres y 490 mujeres. Se sabe que el 60 % de los hombres y el 70 % de las mujeres aprueban dicha asignatura. Se elige una persona al azar.

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que apruebe la asignatura?

   b) Sabiendo que ha aprobado la asignatura, ¿cuál es la probabilidad de que sea una mujer?

Solución

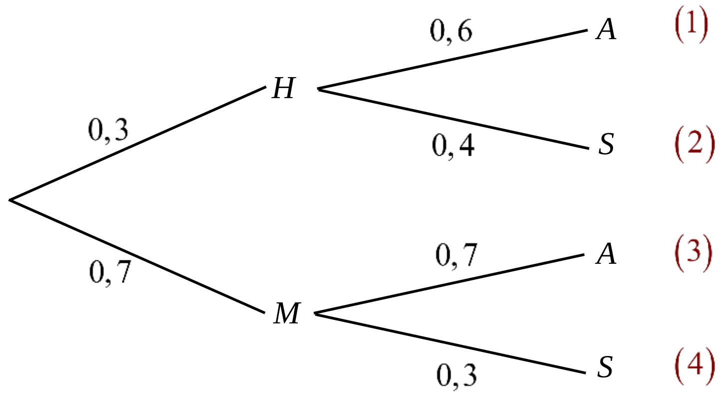
Llamemos H al suceso “ser hombre” y M al suceso “ser mujer”. Llamemos también A al suceso “aprobar la asignatura” y S al suceso “suspender (no aprobar) la asignatura”. Podemos deducir fácilmente del enunciado las siguientes probabilidades: $P(H)=\frac{210}{700}=0,3$; $P(M)=\frac{490}{700}=0,7$; $P(A/H)=0,6$; $P(S/H)=0,4$; $P(A/M)=0,7$; $P(S/M)=0,3$.

a) Por el teorema de la probabilidad total:

$$P(A)=P(H\cap A)+P(M\cap A)=P(H)\cdot P(A/H)+P(M)\cdot P(A/M)=$$
$$=0,3\cdot 0,6+0,7\cdot 0,7=0,18+0,49=0,67.$$

b) $P(M/A)=\dfrac{P(M\cap A)}{P(A)}=\dfrac{P(M)\cdot P(A/M)}{P(A)}=\dfrac{0,7\cdot 0,7}{0,67}=\dfrac{0,49}{0,67}=0,73$.

Podemos resolver este problema haciendo uso directamente de un diagrama de árbol:



a) $P(A)=(1)+(3)=0,3\cdot 0,6+0,7\cdot 0,7=0,18+0,49=0,67$.

b) $P(M/A)=\dfrac{P(M\cap A)}{P(A)}=\dfrac{(3)}{0,67}=\dfrac{0,7\cdot 0,7}{0,67}=\dfrac{0,49}{0,67}=0,73$.

25. La proporción de personas de una población que tiene una determinada enfermedad es de 1 por cada 500 personas. Se dispone de una prueba para detectar dicha enfermedad. La prueba detecta la enfermedad en el 90% de los casos en que la persona está enferma, pero también da como enfermas al 5 % de las personas sanas.

a) Se elige al azar una persona y se le hace la prueba. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido diagnosticada correctamente?

b) Si la prueba ha diagnosticado que la persona está enferma, ¿cuál es la probabilidad de que realmente lo esté? ¿Y de que esté sana?

Solución

Llamemos E al suceso “padecer la enfermedad” y S al suceso “estar sano, o no padecer la enfermedad”. Entonces $P(E)=\frac{1}{500}=0,002$ y $P(S)=0,998$.

Llamemos también $+$ al suceso “detectar la enfermedad, o lo que es lo mismo, dar positivo en la prueba”, y llamemos $-$ al suceso “no detectar la enfermedad, o lo que es lo mismo, dar negativo en la prueba”. Entonces, tenemos que $P(+/E)=0,9$; $P(-/E)=0,1$; $P(+/S)=0,05$ y $P(-/S)=0,95$.

a) Que una persona a la que se le haya hecho la prueba esté diagnosticada correctamente es que, es que esté enferma y la prueba haya salido positiva, o que esté sana y la prueba haya salido negativa. Por tanto, la probabilidad que nos piden es:

$$P(E\cap +)+P(S\cap -)=P(E)\cdot P(+/E)+P(S)\cdot P(-/S)=0,002\cdot 0,9+0,998\cdot 0,95=0,9499\,.$$

b) Si la prueba ha diagnosticado que la persona está enferma es lo mismo que decir que el test ha salido positivo. Entonces:

Probabilidad de que realmente esa persona esté enferma:

$$P(E/+)=\frac{P(E\cap +)}{P(+)}=\frac{P(E\cap +)}{P(E\cap +)+P(S\cap +)}=\frac{P(E)\cdot P(+/E)}{P(E)\cdot P(+/E)+P(S)\cdot P(+/S)}=$$

$$=\frac{0,002\cdot 0,9}{0,002\cdot 0,9+0,998\cdot 0,05}=\frac{0,0018}{0,0517}=0,0348\,.$$

Probabilidad de que realmente esa persona esté sana:

$$P(S/+)=\frac{P(S\cap +)}{P(+)}=\frac{P(S\cap +)}{P(S\cap +)+P(E\cap +)}=\frac{P(S)\cdot P(+/S)}{P(S)\cdot P(+/S)+P(E)\cdot P(+/E)}=$$

$$=\frac{0,998\cdot 0,05}{0,998\cdot 0,05+0,002\cdot 0,9}=\frac{0,0499}{0,0517}=0,965\,.$$

Observemos que estas dos últimas probabilidades son una aplicación directa del teorema de Bayes. Estamos calculando ***probabilidades a posteriori*** o, lo que es lo mismo, ***haciendo predicciones***.

Aunque no lo parezca, el test no es demasiado bueno pues "solamente" detecta al 90 % de las ¡personas enfermas! Para que sea realmente bueno habría de detectar a 99 de cada 100, o mejor, a 999 de cada 1000. Entonces sí que sería una buena prueba. Esto tiene que ver con la ***fiabilidad*** de una prueba. Para que una prueba sea realmente buena, su fiabilidad tiene que ser extremadamente alta. De hecho, sabiendo que el test da positivo podemos predecir no más allá de un 3,5 % de personas verdaderamente enfermas, lo que nos da una idea de la poca fiabilidad de la prueba.

26. Una empresa dedicada a la producción de jamones ibéricos dispone de dos secaderos, A y B, con distintas condiciones ambientales y de almacenamiento. En el secadero B se curan la tercera parte de los jamones. El 25% de los jamones curados en el secadero A son catalogados como Reserva, mientras que en el B este porcentaje asciende al 80 %. Elegido un jamón al azar de uno de los secaderos, calcule la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) El jamón no es de Reserva.

b) Si el jamón es de Reserva, que proceda del secadero A.

Solución

Llamemos A al suceso "proceder del secadero A" y llamemos B al suceso "proceder del secadero B". Llamemos también R al suceso "el jamón es de reserva". Entonces conocemos las siguientes probabilidades:

$$P(A)=\frac{2}{3};\ P(B)=\frac{1}{3};\ P(R/A)=\frac{25}{100}=\frac{1}{4};\ P(\overline{R}/A)=\frac{75}{100}=\frac{3}{4};\ P(R/B)=\frac{80}{100}=\frac{4}{5};$$

$$P(\overline{R}/B)=\frac{20}{100}=\frac{1}{5}.$$

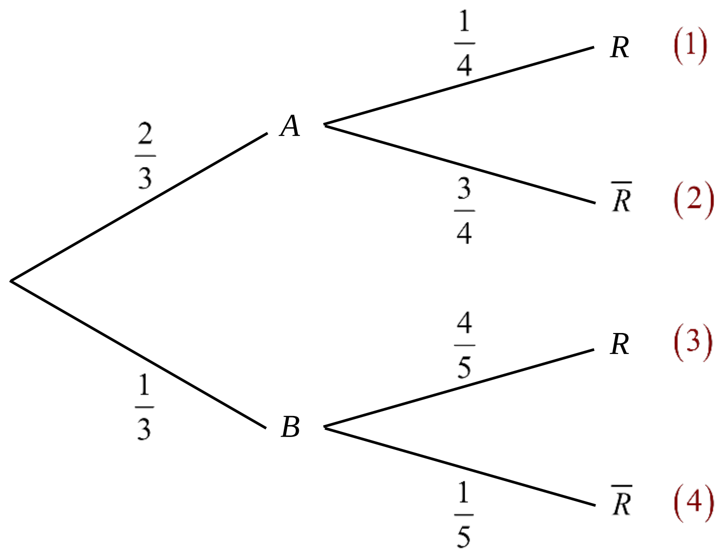
a) Por el teorema de la probabilidad total:

$$P(\overline{R})=P(A\cap\overline{R})+P(B\cap\overline{R})=P(A)\cdot P(\overline{R}/A)+P(B)\cdot P(\overline{R}/B)=$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}=\frac{6}{12}+\frac{1}{15}=\frac{1}{2}+\frac{1}{15}=\frac{15+2}{30}=\frac{17}{30}=0,567\,.$$

b) $P(A/R)=\dfrac{P(A\cap R)}{P(R)}=\dfrac{P(A)\cdot P(R/A)}{1-P(\overline{R})}=\dfrac{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}}{1-\frac{17}{30}}=\dfrac{\frac{2}{12}}{\frac{13}{30}}=\dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{13}{30}}=\dfrac{30}{78}=\dfrac{5}{13}=0,3846\,.$

Hagamos este problema también por el método de la construcción previa de un diagrama de árbol que contenga todas las probabilidades.



a) $P(\overline{R})=(2)+(4)=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}=\frac{6}{12}+\frac{1}{15}=\frac{1}{2}+\frac{1}{15}=\frac{15+2}{30}=\frac{17}{30}=0,567\,.$

b) $P(A/R)=\dfrac{P(A\cap R)}{P(R)}=\dfrac{(1)}{(1)+(3)}=\dfrac{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}}{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{5}}=\dfrac{\frac{2}{12}}{\frac{2}{12}+\frac{4}{15}}=\dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}+\frac{4}{15}}=\dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{13}{30}}=\dfrac{30}{78}=\dfrac{5}{13}=0,3846\,.$

27. Un estudio estadístico determina que la noche del 31 de diciembre conduce el 5 % de la población, el 20 % consume alcohol esa noche y el 2 % conduce y consume alcohol.

a) ¿Son independientes los sucesos “conducir” y “consumir alcohol”?

b) ¿Qué porcentaje de la población no conduce ni consume alcohol esa noche?

c) De las personas que consumen alcohol, ¿qué porcentaje conduce esa noche?

Solución

Llamemos C al suceso “conducir” y A al suceso “consumir alcohol”. Entonces $P(C)=0,05$; $P(A)=0,2$ y $P(C\cap A)=0,02$.

a) Para que los sucesos sean independientes se debe cumplir que $P(C\cap A)=P(C)\cdot P(A)$. Pero resulta que $P(C)\cdot P(A)=0,05\cdot 0,2=0,01\neq 0,02=P(C\cap A)$. Por tanto, los sucesos “conducir” y “consumir alcohol” no son independientes.

b) $P(\overline{C}\cap\overline{A})=P(\overline{C\cup A})=1-P(\overline{C\cup A})=1-\left[P(C)+P(A)-P(C\cap A)\right]=$
$=1-(0,05+0,2-0,02)=1-0,23=0,77\,.$

c) $P(C/A)=\dfrac{P(C\cap A)}{P(A)}=\dfrac{0,02}{0,2}=0,1$. Esto indica que, de las personas que consumen alcohol, el 10 % conduce esa noche.

28. Una enfermedad puede estar provocada por solo una de estas tres causas: A, B o C. La probabilidad de que la causa sea A es 0,3; la de que sea B es 0,2 y la de que sea C es 0,5. El tratamiento de esta enfermedad requiere hospitalización en el 20 % de los casos si está provocada por A, en el 55 % si la causa es B y en el 10 % si la causa es C.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un enfermo con la citada enfermedad no necesite hospitalización?

b) Si un enfermo está hospitalizado debido a esta enfermedad, ¿cuál es la probabilidad de que la causa haya sido A?

Solución

Llamemos A al suceso "la enfermedad está provocada por la causa A", B al suceso "la enfermedad está provocada por la causa B" y C al suceso "la enfermedad está provocada por la causa C". Llamemos también H al suceso "el tratamiento de la enfermedad requiere hospitalización". Entonces, en términos de probabilidades de sucesos, los datos los podemos escribir así: $P(A)=0,3$; $P(B)=0,2$; $P(C)=0,5$; $P(H/A)=0,2$; $P(\overline{H}/A)=0,8$; $P(H/B)=0,55$; $P(\overline{H}/B)=0,45$; $P(H/C)=0,1$; $P(\overline{H}/C)=0,9$.

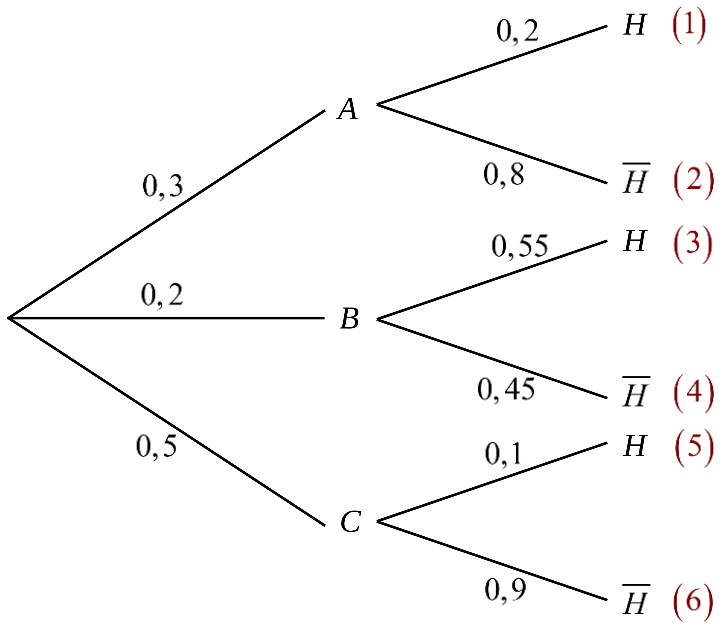
a) Por el teorema de la probabilidad total:

$$P(\overline{H})=P(A\cap\overline{H})+P(B\cap\overline{H})+P(C\cap\overline{H})=P(A)P(\overline{H}/A)+P(B)P(\overline{H}/B)+P(C)P(\overline{H}/C)=$$

$$=0,3\cdot 0,8+0,2\cdot 0,45+0,5\cdot 0,9=0,24+0,09+0,45=0,78.$$

b) $P(A/H)=\dfrac{P(A\cap H)}{P(H)}=\dfrac{P(A)\cdot P(H/A)}{1-P(\overline{H})}=\dfrac{0,3\cdot 0,2}{1-0,78}=\dfrac{0,06}{0,22}=0,27$.

Vamos a hacer el problema usando un diagrama de árbol.



a) $P(\overline{H})=(2)+(4)+(6)=0,3\cdot 0,8+0,2\cdot 0,45+0,5\cdot 0,9=0,24+0,09+0,45=0,78$.

b) $P(A/H)=\dfrac{P(A\cap H)}{P(H)}=\dfrac{(1)}{(1)+(3)+(5)}=\dfrac{0,3\cdot 0,2}{0,3\cdot 0,2+0,2\cdot 0,55+0,5\cdot 0,1}=\dfrac{0,06}{0,22}=0,27$.

29. El 60 % de los jóvenes de una ciudad usa Facebook, el 80 % usa WhatsApp y el 4 % usa Facebook, pero no WhatsApp.

   a) Hallar el porcentaje de jóvenes de esa ciudad que usa ambas aplicaciones.

   b) Calcular el porcentaje de esos jóvenes que usa WhatsApp, pero no Facebook.

   c) Entre los jóvenes que usan WhatsApp, ¿qué porcentaje usa también Facebook?

   d) Los sucesos "usar Facebook" y "usar WhatsApp", ¿son independientes?

Solución

Llamemos F al suceso "usar Facebook" y W al suceso "usar WhatsApp". Entonces $P(F)=0,6$; $P(W)=0,8$ y $P(F\cap\overline{W})=0,04$.

   a) Puesto que $P(F\cap\overline{W})=P(F-W)=P(F)-P(F\cap W)$, sustituyendo tenemos que $0,04=0,6-P(F\cap W)\Rightarrow P(F\cap W)=0,6-0,04=0,56$. Por tanto, el 56 % usan ambas aplicaciones.

   b) $P(W\cap\overline{F})=P(W-F)=P(W)-P(W\cap F)=0,8-0,56=0,24$. Esto quiere decir que el 24 % usa WhatsApp, pero no Facebook.

   c) $P(F/W)=\dfrac{P(F\cap W)}{P(W)}=\dfrac{0,56}{0,8}=0,7$. Esto indica que, entre los jóvenes que usan WhatsApp, usa el 70 % usan también Facebook.

   d) Puesto que $P(F)\cdot P(W)=0,6\cdot 0,8=0,48\neq 0,56=P(F\cap W)$, deducimos que los sucesos "usar Facebook" y "usar WhatsApp" no son independientes.

30. En un centro de estudios que tiene 250 estudiantes, hay 50 que tienen problemas visuales y 20 que tienen problemas auditivos. Los sucesos "tener problemas visuales" y "tener problemas auditivos" son independientes. Se elige un estudiante al azar, calcule las probabilidades de los sucesos siguientes:

   a) Tener problemas visuales y auditivos.

   b) No tener problemas visuales ni auditivos.

   c) Tener algún problema auditivo si no tiene problemas visuales.

Solución

Llamemos V al suceso "tener problemas visuales" y A al suceso "tener problemas auditivos". Entonces tenemos que $P(V)=\dfrac{50}{250}=\dfrac{1}{5}=0,2$ y $P(A)=\dfrac{20}{250}=\dfrac{2}{25}=0,08$.

   a) Puesto que los sucesos son independientes, $P(V\cap A)=P(V)\cdot P(A)=0,2\cdot 0,08=0,016$.

   b) $P(\overline{V}\cap\overline{A})=P(\overline{V\cup A})=1-P(\overline{V\cup A})=1-\left[P(V)+P(A)-P(V\cap A)\right]=$

   $=1-(0,2+0,08-0,016)=1-0,264$.

   c) $P(A/\overline{V})=\dfrac{P(A\cap\overline{V})}{P(\overline{V})}=\dfrac{P(A-V)}{1-P(V)}=\dfrac{P(A)-P(A\cap V)}{1-P(V)}=\dfrac{0,08-0,016}{1-0,2}=\dfrac{0,064}{0,8}=0,08$.