Matemáticas II

Ejercicios de Probabilidad (primera parte)

1. El 60 % de las personas que en el verano pasado ascendieron al pico Aneto tenían menos de 30 años; el 80 % eran catalanes; el 50 % era catalanes y tenían menos de 30 años. Se escoge al azar una persona que el verano pasado subió el Aneto. ¿Cuál es la probabilidad de que tenga más de 30 años y no sea catalán?

Solución

Sean A el suceso "tener menor de 30 años" y B el suceso "ser catalán". Entonces $P(A)=0,6$; $P(B)=0,8$ y $P(A\cap B)=0,5$.

La probabilidad de que tenga más de 30 años y no sea catalán es

$$P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=P\left(\overline{A\cup B}\right)=1-P(A\cup B)=1-\left[P(A)+P(B)-P(A\cap B)\right]=$$

$$=1-(0,6+0,8-0,5)=1-0,9=0,1.$$

2. En una bolsa hay 4 bolas blancas y 3 negras. Se sacan 3 bolas. Calcular la probabilidad de que las tres sean del mismo color. Haz el problema suponiendo que cada vez que se extrae una bola, se devuelve a la bolsa antes de extraer la siguiente (con reemplazamiento); y suponiendo que cada bola que se extrae no se devuelve a la bolsa (sin reemplazamiento).

Solución

Llamaremos B al suceso "salir bola blanca" y N al suceso "salir bola negra". Denotaremos con un subíndice el número de extracción. Así, por ejemplo, B_1 significará que la primera bola extraída es blanca, N_1 que la primera bola extraída es negra, etcétera.

La probabilidad de que las tres bolas sean del mismo color es la de que las tres sean blancas o la de que las tres sean negras. Entonces:

- Con reemplazamiento:

$$P(B_1\cap B_2\cap B_3)+P(N_1\cap N_2\cap N_3)=\frac{4}{7}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{4}{7}+\frac{3}{7}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{3}{7}=\frac{64}{343}+\frac{27}{343}=\frac{91}{343}=\frac{13}{49}=0,2653.$$

- Sin reemplazamiento:

$$P(B_1\cap B_2\cap B_3)+P(N_1\cap N_2\cap N_3)=\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}+\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{24}{210}+\frac{6}{210}=\frac{30}{210}=\frac{1}{7}=0,143.$$

Observaciones de interés

Si hay reemplazamiento los sucesos son independientes y, en ese caso, la probabilidad de la intersección es el producto del las probabilidades:

$$P(B_1\cap B_2\cap B_3)=P(B_1)\cdot P(B_2)\cdot P(B_3).$$

Si no hay reemplazamiento los sucesos no son independientes y lo que ocurra en cada extracción depende de lo que haya ocurrido en la anterior:

$$P(B_1\cap B_2\cap B_3)=P(B_1)\cdot P(B_2/B_1)\cdot P\left(B_3/(B_1\cap B_2)\right)$$

Es decir, ***la probabilidad de que las tres sean blancas es la de que la primera sea blanca, por la de que la segunda sea blanca condicionado a que la primera ha sido blanca, por la probabilidad de que la tercera sea***

blanca condicionado a que las dos primeras han sido blancas. Todo esto, que en lenguaje castellano cuesta un párrafo de tres líneas escribirlo, en lenguaje simbólico se escribe en menos de una. Y se entiende bien.

Observa que, en el caso de haber reemplazamiento, entonces $P(B_2/B_1)=P(B_2)$ porque, ***al devolver la bola, el hecho de que la primera haya sido blanca no influye para nada en la segunda extracción***. Igualmente $P(B_3/(B_1\cap B_2))=P(B_3)$, porque, ***al devolver las bolas, el hecho de que la primera y la segunda hayan sido blancas no influye para nada en la tercera extracción***.

Este problema también se puede hacer dibujando un diagrama de árbol con tres ramificaciones, una por extracción. Lo que pasa es que las probabilidades serán diferentes dependiendo de que se haga con reemplazamiento (devolución de las bolas) o sin reemplazamiento (sin devolución de las bolas).

3. Entre 10 chicas de la clase, hay 3 que juegan al voleibol. Se eligen dos chicas al azar. Hallar la probabilidad de que:

   a) Ambas jueguen al voleibol.

   b) Ninguna juegue al voleibol.

   c) Al menos una juegue al voleibol.

Solución

Llamemos V al suceso “jugar al voleibol”. Vamos a designar con un subíndice la posición de la chica elegida. Por ejemplo, V_1 significará que la primera chica elegida juega al voleibol.

a) $P(V_1\cap V_2)=\dfrac{3}{10}\cdot\dfrac{2}{9}=\dfrac{6}{90}=0,067$.

b) $P(\overline{V_1}\cap\overline{V_2})=\dfrac{7}{10}\cdot\dfrac{6}{9}=\dfrac{42}{90}=0,467$.

c) $P(V_1\cap\overline{V_2})+P(\overline{V_1}\cap V_2)+P(V_1\cap V_2)=\dfrac{3}{10}\cdot\dfrac{7}{9}+\dfrac{7}{10}\cdot\dfrac{3}{9}+\dfrac{3}{10}\cdot\dfrac{2}{9}=\dfrac{48}{90}=0,533$.

Como lo contrario de que al menos una juegue al voleibol es que ninguna juegue al voleibol, podríamos aprovechar el apartado b) para contestar a este apartado del siguiente modo:

$$P(\text{al menos una juega al voleibol})=1-P(\overline{V_1}\cap\overline{V_2})=1-0,467=0,533.$$

4. A los 65 años la probabilidad de que una persona sea miope es 0,1; la probabilidad de que tenga cataratas es 0,25 y la de que sea miope y tenga cataratas es 0,15. ¿Cuál es la probabilidad de que a los 65 años una persona sea miope o tenga cataratas?

Solución

Llamemos M al suceso “ser miope” y C al suceso “tener cataratas”. El enunciado proporciona las siguientes probabilidades: $P(M)=0,1$; $P(C)=0,25$ y $P(M\cap C)=0,15$.

Entonces, la probabilidad de que a los 65 años una persona sea miope o tenga cataratas es:

$$P(M\cup C)=P(M)+P(C)-P(M\cap C)=0,1+0,25-0,15=0,2.$$

5. Sea E el espacio muestral asociado a un experimento aleatorio, y sean A y B sucesos de E. Se sabe que $P(A)=0,6$, $P(B)=0,7$ y $P(A\cup B)-P(A\cap B)=0,3$. Calcular $P(A\cup B)$ y $P(A\cap B)$.

Solución

Puesto que $P(A\cup B)-P(A\cap B)=0,3$, entonces $P(A\cup B)=0,3+P(A\cap B)$ **(1)**.

Pero $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$. Sustituyendo:

$$0,3+P(A\cap B)=0,6+0,7-P(A\cap B)\Rightarrow P(A\cap B)+P(A\cap B)=0,6+0,7-0,3\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2P(A\cap B)=1\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{1}{2}=0,5.$$

Entonces, sustituyendo ahora en **(1)**: $P(A\cup B)=0,3+P(A\cap B)=0,3+0,5=0,8$.

6. El 60 % de los habitantes de una ciudad lee el periódico A, el 45 % lee el periódico B y el 20 % lee los dos periódicos. Hallar la probabilidad de que un habitante elegido al azar no lea ninguno de los dos periódicos.

   Solución

   Sean A el suceso "leer el periódico A" y B el suceso "leer el periódico B". Entonces $P(A)=0,6$; $P(B)=0,45$ y $P(A\cap B)=0,2$. Entonces:

$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-[P(A)+P(B)-P(A\cap B)]=$$

$$=1-(0,6+0,45-0,2)=1-0,85=0,15.$$

7. En un instituto de Bachillerato, el 50 % de los alumnos juega al fútbol o al baloncesto, el 10 % practica ambos deportes y el 60 % no juega al fútbol. Se elige un alumno al azar. Calcular la probabilidad de que

   a) Juegue al fútbol.

   b) Juegue al baloncesto.

   c) Juegue al baloncesto, pero no al fútbol.

   Solución

   Llamemos F al suceso "jugar al fútbol" y B al suceso "jugar al baloncesto". Entonces, según el enunciado tenemos que $P(F\cup B)=0,5$; $P(F\cap B)=0,1$ y $P(\overline{F})=0,6$.

   a) $P(F)=1-P(\overline{F})=1-0,6=0,4$.

   b) $P(F\cup B)=P(F)+P(B)-P(F\cap B)\Rightarrow 0,5=0,4+P(B)-0,1\Rightarrow$
   $\Rightarrow P(B)=0,5-0,4+0,1\Rightarrow P(B)=0,2$.

   c) $P(F\cap\overline{B})=P(F-B)=P(F)-P(F\cap B)=0,4-0,1=0,3$.

8. En una clase el 55 % de los alumnos tienen 17 años, el 20 % son rubios o de ojos azules, y el 10 % cumple las tres condiciones. Hallar la probabilidad de que, al elegir un alumno al azar, tenga 17 años o sea rubio de ojos azules.

   Solución

   Sea M el suceso "tener 17 años", R el suceso "ser rubio" y A el suceso "tener los ojos azules". El enunciado nos proporciona las siguientes probabilidades: $P(M)=0,55$; $P(R\cap A)=0,2$ y $P(M\cap R\cap A)=0,1$.

   Entonces: $P(M\cup(R\cap A))=P(M)+P(R\cap A)-P(M\cap(R\cap A))=0,55+0,2-0,1=0,65$.

   Hemos usado algo completamente obvio, y es que $M\cap(R\cap A)=M\cap R\cap A$.

9. Supongamos que la probabilidad de que llueva es 0,5; la de que llueva o haga viento, 0,75 y la de que no haga viento 0,625. Hallar la probabilidad de que:

   a) Sucedan los dos fenómenos meteorológicos.

   b) No suceda ninguno.

   c) Deje de suceder al menos uno de los dos.

   d) Llueva únicamente.

   Solución

   Llamemos A al suceso "llover" y V al suceso "hacer viento". Entonces, según el enunciado, tenemos las siguientes probabilidades: $P(A)=0,5$; $P(A\cup V)=0,75$ y $P(\overline{V})=0,625 \Rightarrow P(V)=0,375$.

   a) $P(A\cup V)=P(A)+P(V)-P(A\cap V)\Rightarrow 0,75=0,5+0,375-P(A\cap V)\Rightarrow$

   $\Rightarrow P(A\cap V)=0,5+0,375-0,75=0,125$.

   b) $P(\overline{A}\cap\overline{V})=P(\overline{A\cup V})=1-P(A\cup V)=1-0,75=0,25$.

   c) Que deje de suceder al menos uno de los dos es que deje de llover o que deje de hacer viento, es decir, $P(\overline{A}\cup\overline{V})=P(\overline{A\cap V})=1-P(A\cap V)=1-0,125=0,875$.

   d) Que llueva únicamente es que llueva y que no haga viento. O sea:

   $P(A\cap\overline{V})=P(A-V)=P(A)-P(A\cap V)=0,5-0,125=0,375$.

10. En una empresa, el 60 % de los empleados son mujeres, el 30 % es de cabello rubio y el 10 % verifica ambas condiciones. Se elige un empleado al azar.

    a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer o tenga el cabello rubio?

    b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer, pero no rubia?

    c) ¿Cuál es la probabilidad de que sea un varón rubio?

    d) Si es mujer, ¿cuál es la probabilidad de que sea rubia?

    Solución

    Llamemos M al suceso "ser mujer" y R al suceso "tener el cabello rubio". Se nos proporcionan las siguientes probabilidades: $P(M)=0,6$; $P(R)=0,3$ y $P(M\cap R)=0,1$.

    a) $P(M\cup R)=P(M)+P(R)-P(M\cap R)=0,6+0,3-0,1=0,8$.

    b) $P(M\cap\overline{R})=P(M-R)=P(M)-P(M\cap R)=0,6-0,1=0,5$.

    c) $P(\overline{M}\cap R)=P(R\cap\overline{M})=P(R-M)=P(R)-P(R\cap M)=0,3-0,1=0,2$.

    d) $P(R/M)=\dfrac{P(R\cap M)}{P(M)}=\dfrac{0,1}{0,6}=0,167$.

11. En un instituto, entre los alumnos de Bachillerato que han elegido la opción de ciencias, el 25 % ha suspendido la física, el 15 % ha suspendido las matemáticas y el 10 % ambas asignaturas. Se elige un alumno al azar y se pide:

    a) Calcular la probabilidad de que haya suspendido una de las dos asignaturas por lo menos.

b) Hallar la probabilidad de que sólo haya suspendido una de las dos asignaturas.

c) Encontrar la probabilidad de que haya aprobado ambas asignaturas.

d) Calcular la probabilidad de que sólo haya suspendido las matemáticas.

Solución

Sean los sucesos M, "suspender las matemáticas" y F, "suspender la física". Entonces $P(M)=0{,}15$; $P(F)=0{,}25$ y $P(M\cap F)=0{,}1$.

a) $P(M\cup F)=P(M)+P(F)-P(M\cap F)=0{,}15+0{,}25-0{,}1=0{,}3$.

b) $P\left[\left(M\cap\overline{F}\right)\cup\left(F\cap\overline{M}\right)\right]=P\left(M\cap\overline{F}\right)+P\left(F\cap\overline{M}\right)=P(M-F)+P(F-M)=$

$=P(M)-P(M\cap F)+P(F)-P(F\cap M)=P(M)+P(F)-2\cdot P(F\cap M)=$

$=0{,}15+0{,}25-2\cdot 0{,}1=0{,}4-0{,}2=0{,}2$.

c) Aprobar ambas es no suspender ninguna: $P\left(\overline{M}\cap\overline{F}\right)=P\left(\overline{M\cup F}\right)=1-P(M\cup F)=1-0{,}3=0{,}7$.

d) $P\left(M\cap\overline{F}\right)=P(M-F)=P(M)-P(M\cap F)=0{,}15-0{,}1=0{,}05$.

12. Una urna contiene 7 bolas blancas, 3 bolas rojas y 2 bolas negras. Se considera el experimento aleatorio consistente en extraer tres bolas de la urna, de forma sucesiva y sin reemplazamiento. Sean los sucesos B_1: "la primera bola es blanca", B_2: "la segunda bola es blanca" y B_3: "la tercera bola es blanca".

a) Expresar con ellos el suceso "las bolas extraídas en primer y tercer lugar son blancas, y la extraída en segundo lugar no".

b) Calcular la probabilidad del suceso "Las tres bolas son del mismo color".

Solución

a) $B_1\cap\overline{B_2}\cap B_3$.

b) Al igual que los sucesos B_1, B_2, B_3 para la extracción de bolas blancas; también llamaremos R_1, R_2, R_3 y N_1, N_2, N_3, para la extracción de bolas rojas y negras, respectivamente. Entonces, que las tres bolas extraídas sean del mismo color es que las tres sean blancas, o las tres sean rojas, o las tres sean negras:

$P\left[(B_1\cap B_2\cap B_3)\cup(R_1\cap R_2\cap R_3)\cup(N_1\cap N_2\cap N_3)\right]=$

$=P(B_1\cap B_2\cap B_3)+P(R_1\cap R_2\cap R_3)+P(N_1\cap N_2\cap N_3)=\frac{7}{12}\cdot\frac{6}{11}\cdot\frac{5}{10}+\frac{3}{12}\cdot\frac{2}{11}\cdot\frac{1}{10}+\frac{2}{12}\cdot\frac{1}{11}\cdot\frac{0}{10}=$

$=\frac{210}{1320}+\frac{6}{1320}+\frac{0}{1320}=\frac{216}{1320}=\frac{9}{55}=0{,}1636$.

13. Con el objetivo de recaudar fondos para un viaje, los alumnos de un instituto realizan una rifa con 500 números. Un alumno compra dos números.

a) Si sólo hay un premio, ¿qué probabilidad tiene el alumno de que le toque a él?

b) Si hay dos premios, ¿qué probabilidad tiene el alumno de que le toque al menos uno de ellos?

Solución

Llamemos A al suceso "que toque el premio".

a) Por la regla de Laplace: $P(A)=\frac{2}{500}=\frac{1}{250}=0,004$.

b) Llamemos A_1 al suceso "que toque el premio número 1" y A_2 al suceso "que toque el premio número 2". Entonces, que le toque al menos uno de ellos es que le toquen los dos, o que le toque el premio número 1 y no el número 2, o que le toque el premio número 2 y no el número 1. Es decir:

$$P(A_1\cap A_2)+P(A_1\cap\overline{A_2})+P(\overline{A_1}\cap A_2)=\frac{2}{500}\cdot\frac{1}{499}+\frac{2}{500}\cdot\frac{498}{499}+\frac{498}{500}\cdot\frac{2}{499}=\frac{1994}{249500}=0,008.$$

Este apartado también lo podemos hacer de una manera equivalente, puede que hasta más sencilla.

La probabilidad de que le toque al menos uno de los premios es la contraria de la que no le toque ninguno. Como la de que no le toque ninguno es $P(\overline{A_1}\cap\overline{A_2})=\frac{498}{500}\cdot\frac{497}{499}=\frac{247506}{249500}=0,992$.

Entonces: $P(\text{le toque al menos uno})=1-0,992=0,008$.

14. Se elige un número natural entre el 1 y el 20 de manera que todos tengan la misma probabilidad de ser escogidos. ¿Cuál es la probabilidad de que el número escogido sea divisible por 2 o por 3? ¿Cuál es la probabilidad de que sea divisible por 3 y no por 6?

Solución

De entre los primeros 20 números naturales, vamos a escribir los divisores de 2, de 3 y de 6:

$\text{Div}(2)=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14,\ 16,\ 18,\ 20\}$; $\text{Div}(3)=\{3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15,\ 18\}$; $\text{Div}(6)=\{6,\ 12,\ 18\}$.

Además, los que no divisores de 6 son: $\overline{\text{Div}(6)}=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 13,\ 14,\ 15,\ 16,\ 17,\ 19,\ 20\}$.

Si llamamos A al suceso "ser divisible por 2 o por 3", entonces, uniendo los divisores de 2 y los divisores de 3:

$A=Div(2)\cup Div(3)=\{2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 10,\ 12,\ 14,\ 15,\ 16,\ 18,\ 20\}$.

Por tanto, la probabilidad de que el número escogido sea divisible por 2 o por 3 es $P(A)=\frac{13}{20}=0,65$.

Si llamamos B al suceso "ser divisible por 3 y no por 6", entonces, eligiendo los números que son divisores de 3 y al mismo tiempo no lo son de 6, tenemos: $B=\text{Div}(3)\cap\overline{\text{Div}(6)}=\{3,\ 9,\ 15\}$.

Por tanto, la probabilidad de que el número escogido sea divisible por 3 y no por 6 es $P(B)=\frac{3}{20}=0,15$.

15. Sean A y B dos sucesos tales que $P(A)=\frac{3}{4}$, $P(B)=\frac{1}{2}$ y $P(\overline{A}\cap\overline{B})=\frac{1}{20}$. Calcular $P(A\cup B)$ y $P(A\cap B)$.

Solución

Según una de las leyes de De Morgan, $P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)$. Entonces, sustituyendo:

$$\frac{1}{20}=1-P(A\cup B)\Rightarrow P(A\cup B)=1-\frac{1}{20}=\frac{19}{20}.$$

Ahora, puesto que $P(A\cup B)=P(A)+P(B)+P(A\cap B)$, volviendo a sustituir: $\frac{19}{20}=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}-P(A\cap B)\Rightarrow$

$\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}-\frac{19}{20}=\frac{15+10-19}{20}=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$.

16. En un juego consistente en lanzar dos monedas indistinguibles y equilibradas y un dado de seis caras equilibrado, un jugador gana si obtiene dos caras y un número par en el dado, o bien exactamente una cara y un número mayor o igual a cinco en el dado.

    a) Calcular la probabilidad de que un jugador gane.

    b) Se sabe que una persona ha ganado. ¿Cuál es la probabilidad de que obtuviera dos caras al lanzar las monedas?

Solución

Llamemos C al suceso “salir cara” y X al suceso “salir cruz”. Los casos posibles al lanzar dos monedas indistinguibles son $\{CC,CX,XC,XX\}$. Entonces, si llamamos A al suceso “salir dos caras”, tenemos que $P(A)=P(CC)=\frac{1}{4}$ y si llamamos B al suceso “salir exactamente una cara”, tenemos que $P(B)=P(CX\cup XC)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

Llamemos también P al suceso “salir para al lanzar el dado” y M al “suceso salir mayor o igual que 5 al lanzar el dado”. Puesto que los casos posibles al lanzar un dado son $\{1,2,3,4,5,6\}$, se tiene que $P(P)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ y $P(M)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

a) Si llamamos G al suceso “que el jugador gane”, tenemos:

$$P(G)=P\left[(A\cap P)\cup(P\cap M)\right]=P(A\cap P)+P(B\cap M)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{8}+\frac{1}{6}=\frac{3+4}{24}=\frac{7}{24}=0,29$$

b) $P(A/G)=\dfrac{P(A\cap G)}{P(G)}=\dfrac{P(A\cap P)}{P(G)}=\dfrac{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{7}{24}}=\dfrac{\frac{1}{8}}{\frac{7}{24}}=\dfrac{24}{56}=\dfrac{3}{7}=0,43$.

Obsérvese que, como se sabe que el jugador ha ganado, el suceso “salir dos caras y ganar” es el mismo que “salir dos caras y par”. Por eso $P(A\cap G)=P(A\cap P)$.

17. Se consideran dos actividades de ocio: A, “ver televisión” y B, “visitar centros comerciales”. En una ciudad, la probabilidad de que un adulto practique A es igual a $0,46$; la probabilidad de que practique B es igual a $0,33$ y la probabilidad de que practique A y B es igual a $0,15$.

    a) Se selecciona al azar un adulto de dicha ciudad. ¿Cuál es la probabilidad de que no practique ninguna de las dos actividades anteriores?

    b) Se elige al azar un individuo de entre los que practican alguna de las dos actividades. ¿Cuál es la probabilidad de que practique las dos actividades?

Solución

Según el enunciado $P(A)=0,46$; $P(B)=0,33$ y $P(A\cap B)=0,15$.

a) $P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=P\left(\overline{A\cup B}\right)=1-P(A\cup B)=1-\left[P(A)+P(B)-P(A\cap B)\right]=$

$=1-\left(0,46+0,33-0,15\right)=1-0,64=0,36$.

b) La condición que conocemos es que escogemos el individuo de entre los que practican alguna de las dos actividades, es decir, la condición es $A\cup B$. Y, bajo esta condición, queremos hallar la probabilidad de que practique las dos actividades, es decir, $A\cap B$. O sea:

$$P\left[(A\cap B)/(A\cup B)\right]=\frac{P\left[(A\cap B)\cap(A\cup B)\right]}{P(A\cup B)}=\frac{P(A\cap B)}{P(A\cup B)}=\frac{P(A\cap B)}{P(A)+P(B)-P(A\cap B)}=$$

$$=\frac{0,15}{0,46+0,33-0,15}=\frac{0,15}{0,64}=0,234.$$

18. La probabilidad de que un habitante de cierto pueblo de la Comunidad de Madrid le guste la música moderna es igual a $0,55$; la probabilidad de que le guste la música clásica es igual a $0,40$ y la probabilidad de que no le guste ninguna de las dos es igual a $0,25$. Se elige al azar un habitante de dicho pueblo. Calcúlese la probabilidad de que le guste:

a) Al menos uno de los dos tipos de música.

b) La música clásica y también la moderna.

c) Sólo la música clásica.

d) Sólo la música moderna.

Solución

Llamemos M al suceso "gustarle la música moderna" y C al suceso "gustarle la música clásica". Entonces $P(M)=0,55$; $P(C)=0,4$ y $P\left(\overline{M}\cap\overline{C}\right)=0,25$.

a) Se pide la probabilidad del suceso $M\cup C$. Como $P\left(\overline{M}\cap\overline{C}\right)=0,25$, usando las leyes de De Morgan, tenemos: $P\left(\overline{M}\cap\overline{C}\right)=P\left(\overline{M\cup C}\right)=1-P(M\cup C)\Rightarrow 0,25=1-P(M\cup C)\Rightarrow P(M\cup C)=0,75$.

b) $P(M\cup C)=P(M)+P(C)-P(M\cap C)\Rightarrow 0,75=0,55+0,4-P(M\cap C)\Rightarrow$

$\Rightarrow P(M\cap C)=0,55+0,4-0,75\Rightarrow P(M\cap C)=0,2$.

c) $P\left(C\cap\overline{M}\right)=P(C-M)=P(C)-P(C\cap M)=0,4-0,2=0,2$.

d) $P\left(M\cap\overline{C}\right)=P(M-C)=P(M)-P(M\cap C)=0,55-0,2=0,35$.

19. Sean dos sucesos A y B de un experimento aleatorio tales que $P(A)=0,5$, $P(B)=0,4$ y $P(A\cap B)=0,1$. Calcular las siguientes probabilidades: $P(A\cup B)$, $P\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)$

Solución

- $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0,5+0,4-0,1=0,8$.
- $P\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)=P\left(\overline{A\cap B}\right)=1-P(A\cap B)=1-0,1=0,9$.

20. Dados los sucesos A y B, sabemos que $P(A\cap B)=0{,}1$; $P(A\cup B)=0{,}7$ y $P(A/B)=0{,}2$. Calcula $P(A)$, $P(B)$ y $P(\overline{A}\cup B)$.

Solución

Como $P(A/B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$, sustituyendo tenemos: $0{,}2=\dfrac{0{,}1}{P(B)}\Rightarrow P(B)=\dfrac{0{,}1}{0{,}2}=0{,}5$.

Y como $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$, sustituyendo también:

$0{,}7=P(A)+0{,}5-0{,}1\Rightarrow P(A)=0{,}7-0{,}5+0{,}1=0{,}3$.

Finalmente:

$$P(\overline{A}\cup B)=P(\overline{A})+P(B)-P(\overline{A}\cap B)=P(\overline{A})+P(B)-P(B\cap\overline{A})=P(\overline{A})+P(B)-P(B-A)=$$

$$=1-P(A)+P(B)-\big(P(B)-P(B\cap A)\big)=1-0{,}3+0{,}5-(0{,}5-0{,}1)=1+0{,}2-0{,}4=0{,}8.$$

21. En un espacio muestral se sabe que para dos sucesos A y B se verifica $P(A\cap B)=0{,}1$, $P(\overline{A}\cap\overline{B})=0{,}6$ y $P(A/B)=0{,}5$. Calcular $P(A)$ y $P(A\cup B)$.

Solución

$P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)$. Entonces, $0{,}6=1-P(A\cup B)\Rightarrow P(A\cup B)=1-0{,}6=0{,}4$.

Además: $P(A/B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}\Rightarrow 0{,}5=\dfrac{0{,}1}{P(B)}\Rightarrow P(B)=\dfrac{0{,}1}{0{,}5}\Rightarrow P(B)=0{,}2$.

Por tanto, como $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$, tenemos que

$0{,}4=P(A)+0{,}2-0{,}1\Rightarrow P(A)=0{,}4-0{,}2+0{,}1\Rightarrow P(A)=0{,}3$.

22. Ana y Blas deciden jugar con un dado de la siguiente forma: “Ana lanza el dado y, si saca un 6, gana y se acaba el juego. En caso contrario lanza Blas, que gana si saca un 2 o un 3, y también se acaba el juego. De no ocurrir esto, la partida se acaba sin ganador. Hallar la probabilidad de los siguientes sucesos: “gana Ana”, “gana Blas”, “ninguno gana”.

Solución

Llamemos A al suceso “gana Ana” y B al suceso “gana Blas”. Llamaremos también 1, 2, 3, 4, 5 y 6 a los suceso “salir 6”. Entonces:

- Probabilidad de que gane Ana: $P(A)=P(6)=\dfrac{1}{6}$.
- Probabilidad de que gane Blas: $P(B)=P\big(\overline{6}\cap(2\cup3)\big)=P(\overline{6})\cdot P(2\cup3)=\dfrac{5}{6}\cdot\dfrac{2}{6}=\dfrac{10}{36}=\dfrac{5}{18}$.

  Observa que para que gane Blas no puede salir 6 en tirada de Ana y ha de salir 2 o 3 en la tirada de Blas.
- Probabilidad de que no gane ninguno:

  $P(\overline{A}\cap\overline{B})=P\big(\overline{6}\cap(\overline{2\cup3})\big)=P(\overline{6})\cdot P(\overline{2\cup3})=\dfrac{5}{6}\cdot\dfrac{4}{6}=\dfrac{20}{36}=\dfrac{5}{9}$

Conviene darse cuenta de que todo tiene sentido porque $\dfrac{1}{6}+\dfrac{5}{18}+\dfrac{5}{9}=\dfrac{3+5+10}{18}=\dfrac{18}{18}=1$, es decir, al realizar el juego o gana Ana, o gana Blas, o no gana ninguno; la unión de ellas es todo el espacio, cuya probabilidad es 1.

23. Un polideportivo dispone de 100 bolas de pádel y 120 bolas de tenis. Se sabe que 65 bolas son nuevas. Además, 75 bolas de pádel son usadas. Por un error, todas las bolas se han mezclado.

    a) Calcular la probabilidad de que, si elegimos al azar una bola de tenis, ésta sea usada.

    b) Calcular la probabilidad de que, si elegimos al azar una bola, sea nueva.

    Solución

    Para hacer este problema vamos a elaborar una tabla en la que aparezcan los datos del enunciado.

	Nuevas	Usadas	Total
Bolas de pádel	25	75	100
Bolas de tenis	40	80	120
Total	65	155	220

Llamemos T y P a los sucesos "elegir bola de tenis" y "elegir bola de pádel", respectivamente. Y llamemos también, respectivamente, N y U a los sucesos "elegir bola nueva" y "elegir bola usada". Mediante la regla de Laplace podemos contestar ahora fácilmente a ambos apartados.

a) $P(U/T)=\dfrac{80}{120}=\dfrac{2}{3}=0,667$.

b) $P(N)=\dfrac{65}{220}=\dfrac{13}{44}=0,295$.

24. En una capital se editan dos periódicos, CIUDAD y LA MAÑANA. Se sabe que el 85 % de la población lee alguno de ellos, que el 18 % lee los dos y que el 70 % lee CIUDAD. Si elegimos al azar un habitante de esa capital, halle la probabilidad de que:

    a) No lea ninguno de los dos.

    b) Lea sólo MAÑANA.

    Solución

    Llamemos C al suceso "leer el periódico CIUDAD" y M al suceso "leer el periódico MAÑANA". Entonces sabemos que $P(C\cup M)=0{,}85$; $P(C\cap M)=0{,}18$ y $P(C)=0{,}7$.

    Con las probabilidades anteriores podemos hallar la probabilidad del suceso M:

$$P(C\cup M)=P(C)+P(M)-P(C\cap M)\Rightarrow 0{,}85=0{,}7+P(M)-0{,}18\Rightarrow P(M)=0{,}33.$$

a) $P\left(\overline{C}\cap\overline{M}\right)=P\left(\overline{C\cup M}\right)=1-P(C\cup M)=1-0{,}85=0{,}15$.

b) $P\left(M\cap\overline{C}\right)=P(M-C)=P(M)-P(M\cap C)=0{,}33-0{,}18=0{,}15$.

25. Un dado tiene seis caras, tres de ellas marcadas con un 1, dos marcadas con una X y la otra marcada con un 2. Se lanza tres veces ese dado.

    a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener tres veces el 1?

    b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos X y un 2 en cualquier orden?

    c) ¿Cuál es la probabilidad de obtener tres resultados diferentes?

    Solución

    Sean los sucesos 1, X y 2, "salir 1", "salir X" y "salir 2", respectivamente. Según configuración del dado:

$P(1)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, $P(X)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ y $P(2)=\frac{1}{6}$.

Además, los lanzamientos del dado son independientes, pues el resultado de una tirada no influye para nada en el resultado de otro tirada.

a) $P(1\cap 1\cap 1)=P(1)\cdot P(1)\cdot P(1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}=0{,}125$.

b) $P(X\cap X\cap 2)+P(X\cap 2\cap X)+P(2\cap X\cap X)=$

$=P(X)\cdot P(X)\cdot P(2)+P(X)\cdot P(2)\cdot P(X)+P(2)\cdot P(X)\cdot P(X)=$

$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{54}+\frac{1}{54}+\frac{1}{54}=\frac{3}{54}=\frac{1}{18}=0{,}0556$.

c) Obtener tres resultados diferentes es lo contrario de obtener tres resultados iguales. O sea:

$P(\text{tres resultados diferentes})=1-\left[P(1\cap 1\cap 1)+P(X\cap X\cap X)+P(2\cap 2\cap 2)\right]=$

$1-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\right)=1-\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{27}+\frac{1}{216}\right)=1-\frac{365}{2916}=\frac{2551}{2916}=0{,}8748$.

También se puede hacer sumando las probabilidades de los siguientes sucesos; el resultado tiene que ser el mismo (¡compruébalo!): $1\cap X\cap 2$, $1\cap 2\cap X$, $X\cap 1\cap 2$, $X\cap 2\cap 1$, $2\cap 1\cap X$, $2\cap X\cap 1$.

26. De las 180 personas que asisten a un congreso médico, 100 son mujeres. Observando las especialidades de los congresistas, vemos que de las 60 personas que son pediatras 20 son mujeres. Se elige al azar una persona asistente al congreso.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer y pediatra?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que no sea hombre ni sea pediatra?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que sea pediatra?

Solución

Con los datos que tenemos es fácil confeccionar una tabla como la siguiente:

	Mujeres	Hombres	Total
Pediatras	20	40	60
No pediatras	80	40	120
Total	100	80	180

Llamemos M al suceso "ser mujer" y P al suceso "ser pediatra". Para hallar las probabilidades que nos piden haremos uso de la regla de Laplace.

a) $P(M\cap P)=\frac{20}{180}=\frac{1}{9}$.

b) No ser hombre y ser pediatra es lo mismo que ser mujer y no ser pediatra. Entonces:

$P(M\cap \overline{P})=\frac{80}{180}=\frac{4}{9}$.

Si usamos la fórmula de la diferencia de sucesos, también nos sale:

$P(M\cap \overline{P})=P(M-P)=P(M)-P(M\cap P)=\frac{100}{180}-\frac{20}{180}=\frac{80}{180}=\frac{4}{9}$

c) $P(P)=\frac{60}{180}=\frac{1}{3}$.

27. En el experimento aleatorio consistente en lanzar un dado equilibrado con las caras numeradas del 1 al 6 y observar el resultado se consideran los sucesos A: “obtener un número mayor que 4” y B: “obtener un número par”.

a) Escribir los elementos de cada uno de los siguientes sucesos: A, B, $\overline{A}\cup B$, $A\cap\overline{B}$, $\overline{A\cap B}$.

b) Calcular las siguientes probabilidades: $P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)$ y $P\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)$.

Solución

a) $A=\{5,6\}$, $B=\{2,4,6\}$, $\overline{A}\cup B=\{1,2,3,4,6\}$, $A\cap\overline{B}=\{5\}$, $\overline{A\cap B}=\{1,2,3,4,5\}$.

b) Puesto que $\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}$, y $A\cup B=\{2,4,5,6\}$, tenemos que $\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}=\{1,3\}$. Por tanto,

$P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

Por otra parte, ya hemos visto que $\overline{A\cap B}=\{1,2,3,4,5\}$. Entonces $P\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)=P\left(\overline{A\cap B}\right)=\frac{5}{6}$.

28. Un jugador lanza a la vez un dado y una moneda.

a) Construir el espacio muestral de este experimento aleatorio.

b) Determinar la probabilidad del suceso A: “el jugador obtiene un número par en el dado y cruz en la moneda”.

Solución

El espacio muestral asociado al lanzamiento de un dado es $\{1,2,3,4,5,6\}$ y el asociado al lanzamiento de una moneda es $\{C,X\}$.

a) Podemos expresarlo así:

$$E=\{(1,C),(2,C),(3,C),(4,C),(5,C),(6,C),(1,X),(2,X),(3,X),(4,X),(5,X),(6,X)\}.$$

b) Lo haremos usando la regla de Laplace, pues el suceso tiene 3 casos favorables de 12 posibles:

$P(A)=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}=0,25$.

29. Una bolsa contiene 5 bolas blancas, 3 rojas y 4 negras. Ana y Luis practican el siguiente juego: Ana saca una bola, anota su color y la devuelve a la bolsa, a continuación, Luis extrae una bola y anota su color. Si las dos bolas extraídas tienen el mismo color gana Ana, si sólo hay una bola blanca gana Luis, y en otro caso hay empate.

a) Calcular la probabilidad de que gane Ana.

b) Calcular la probabilidad de que gane Luis.

c) Calcular la probabilidad de que haya empate.

Solución

Llamemos B al suceso “salir bola blanca”, R al suceso “salir bola roja” y N al suceso “salir bola negra”. Además, como Ana devuelve la primera bola extraída a la bolsa, el color de la bola no depende de que la bola se haya extraído en primer o en segundo lugar. O sea, la probabilidad del color de la bola es siempre la misma.

a) La probabilidad de que gane Ana es la probabilidad de que ambas bolas sean del mismo color. O sea:

$$P(B\cap B)+P(R\cap R)+P(N\cap N)=\frac{5}{12}\cdot\frac{5}{12}+\frac{3}{12}\cdot\frac{3}{12}+\frac{4}{12}\cdot\frac{4}{12}=\frac{25+9+16}{144}=\frac{50}{144}=0,347\,.$$

b) La probabilidad de que gane Luis es la probabilidad de que sólo haya una bola blanca. Es decir:

$$P(B\cap R)+P(R\cap B)+P(B\cap N)+P(N\cap B)=2\cdot\frac{5}{12}\cdot\frac{3}{12}+2\cdot\frac{5}{12}\cdot\frac{4}{12}=\frac{30}{144}+\frac{40}{144}=\frac{70}{144}=0,486\,.$$

c) Para que haya empate no pueden salir ni dos bolas del mismo color, ni que solamente una de ellas sea blanca. Esto deja solamente dos posibilidades: $R\cap N$ y $N\cap R$. Por tanto, la probabilidad de que haya empate es: $P(R\cap N)+P(N\cap R)=\frac{4}{12}\cdot\frac{3}{12}+\frac{3}{12}\cdot\frac{4}{12}=\frac{24}{144}=0,167$.

30. En un centro de enseñanza los alumnos pueden hacer uso o no del comedor. La distribución de alumnos en los tres cursos del centro es la siguiente:

	Primer curso	Segundo curso	Tercer curso
Hace uso del comedor	67	60	57
No hace uso del comedor	23	20	18

a) Se escoge al azar un alumno del centro; ¿cuál es la probabilidad de que sea de segundo curso y haga uso del comedor?

b) Se escoge al azar un alumno de los que hacen uso del comedor; ¿cuál es la probabilidad de que sea de segundo curso?

c) Se escogen al azar dos alumnos distintos del centro; ¿cuál es la probabilidad de que sean del mismo curso?

Solución

Completemos la tabla con los totales.

	Primer curso	Segundo curso	Tercer curso	Total
Hace uso del comedor	67	60	57	184
No hace uso del comedor	23	20	18	61
Total	90	80	75	245

Para contestar a cada apartado haremos uso de la regla de Laplace. Para ello usaremos la tabla anterior y nombraremos así a los sucesos: 1^o, "escoger un alumno de primer curso"; 2^o, "escoger un alumno de segundo curso" y 3^o, "escoger un alumno de tercer curso". También llamaremos C al suceso "hacer uso del comedor·.

a) $P(2^o\cap C)=\frac{80}{245}=0,3265$.

b) Al escoger al azar un alumno de los que hacen uso del comedor, estamos reduciendo el número de casos posibles hasta 184, con lo que la probabilidad de que sea de segundo curso es $P(2^o/C)=\frac{60}{184}=0,326$.

También se puede hacer así: $P(2^o/C)=\dfrac{P(2^o\cap C)}{P(C)}=\dfrac{\frac{60}{245}}{\frac{184}{245}}=\dfrac{60\cdot\cancel{245}}{184\cdot\cancel{245}}=\dfrac{60}{184}=0,326$.

c) $P(1^o\cap 1^o)+P(2^o\cap 2^o)+P(3^o\cap 3^o)=\frac{90}{245}\cdot\frac{89}{244}+\frac{80}{245}\cdot\frac{79}{244}+\frac{75}{245}\cdot\frac{74}{244}=\frac{19880}{59780}=0,3326$.