1. Dada la función $f\left(x\right)=\dfrac{\left|x\right|}{\sqrt{x^2+9}}$, se pide:
   a) Determinar, si existen, las asíntotas horizontales de $f\left(x\right)$.
   b) Calcular $f'\left(4\right)$.
   c) Hallar el área del recinto limitado por la curva $y=f\left(x\right)$, el eje OX y las rectas $x=-1$ y $x=1$.

2. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} m & 0 & 2 \\ -2 & 4 & m \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, se pide:
   a) Obtener los valores del parámetro m para los que la matriz A admite inversa.
   b) Para $m=0$, calcular $A\cdot B$ y $A^{-1}\cdot B$.
   c) Calcular $B\cdot B^t$ y $B^t\cdot B$, donde B^t denota la matriz traspuesta de B.

3. Aplicar el método de integración por partes para calcular la integral $\int_1^2 x^2\ln x\,dx$.

4. Si $f\left(x\right)=\dfrac{e^{3x}-e^{-3x}}{4x}$, indica de forma razonada en qué valor $x=a$ no está definida $f\left(x\right)$. Calcula el valor de $b\in\mathbb{R}$ para que la función $g\left(x\right)=\begin{cases} f\left(x\right) & \text{si} \quad x\neq a \\ b & \text{si} \quad x=a \end{cases}$ sea continua.

5. Dada la función $f\left(x\right)=9x+6x^2-x^4$, se pide:
   a) Halla los puntos en los que la recta tangente a la gráfica de $f\left(x\right)$ tiene pendiente 1.
   b) Calcula los puntos de inflexión de $f\left(x\right)$.

6. Sea $f:\left(0,+\infty\right)\to\mathbb{R}$ la función dada por $f\left(x\right)=\ln x$.
   a) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=1$.
   b) Esboza el recinto comprendido entre la gráfica de f, la recta $y=x-1$ y la recta $x=3$. Calcula su área.

7. Considera las matrices $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ -8 & 7 & 4 \\ 8 & -6 & -3 \end{pmatrix}$
   a) Halla la matriz X que verifica $AX+B=2A$.
   b) Calcula B^2 y B^{2016}.

8. Sabiendo que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(x+1\right)-a\,\mathrm{sen}\,x+x\cos 3x}{x^2}$ es finito, calcula a y el valor del límite.

9. Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función f en el punto de abscisa $x=1$ sabiendo que $f\left(0\right)=0$ y $f'\left(x\right)=\dfrac{\left(x-1\right)^2}{x+1}$ para $x>-1$.

10. Queremos fabricar una caja con base cuadrada, de tal manera que la altura de la caja más el perímetro de la base sumen 60 cm. Determina sus dimensiones para que contenga el mayor volumen posible.

11. Sea la función definida por $f(x)=\dfrac{\ln x}{2x}$ para $x>0$ y sea F la primitiva de f tal que $F(1)=2$.
    a) Calcula $F'(e)$.
    b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de F en el punto de abscisa $x=e$.

12. Considera las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 4 & 1\end{pmatrix}$.
    a) Halla el determinante de una matriz X que verifique la igualdad $X^2AX=B$.
    b) Determina, si existe, la matriz Y que verifica la igualdad $A^2YB^{-1}=A$.

13. Enuncia el teorema de Bolzano. Como aplicación de este teorema, demuestra que las gráficas de las funciones $f(x)=e^x$ y $g(x)=2\cos\left(x^2\right)$ se cortan en, al menos, un punto.

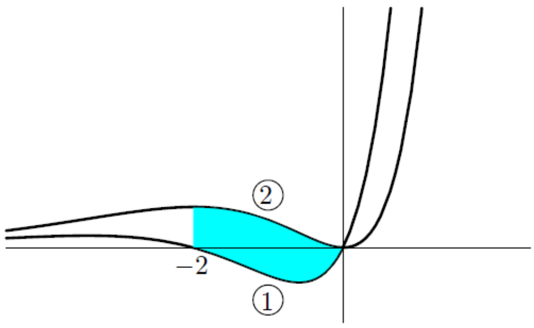
14. Considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} ax+y+3z=4\\ x+y-2z=-2\\ -x+2y+(3+a)z=4+a \end{cases}$$

    a) Determina, si existen, los valores de a para los que el sistema dado tiene solución única.
    b) Determina, si existen, los valores de a para los que el sistema dado tiene al menos dos soluciones. Halla todas las soluciones en dichos casos

15. Sea f la función definida por $f(x)=\dfrac{e^x}{x-1}$ para $x\neq 1$.
    a) Estudia y calcula las asíntotas de la gráfica de f.
    b) Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) de f.

16. Se sabe que las dos gráficas del dibujo corresponden a la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^2e^x$ y a su función derivada f'.
    a) Indica, razonando la respuesta, cuál es la gráfica de f y cuál la de f'.
    b) Calcula el área de la región sombreada.



17. Dado el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+y+z=-2\\ -\lambda x+3y+z=-7\\ x+2y+(\lambda+2)z=-5 \end{cases}$$

    a) Clasifica el sistema según los valores del parámetro λ.
    b) Resuelve el sistema cuando sea compatible indeterminado.

18. Calcula el valor de $a>1$ sabiendo que el área del recinto comprendido entre la parábola $y=-x^2+ax$ y la recta $y=x$ es $\frac{4}{3}$.

19. Sea la función definida por $f(x)=x^2-|x|$.
    a) Estudia la derivabilidad de f.
    b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.
    c) Calcula los extremos relativos de f (abscisas que se obtienen y valores que se alcanzan).

20. Enuncia el teorema del valor medio de Lagrange. Dada la función $f(x)=\frac{1+x}{2-x}$, se pide:
    a) ¿Se puede aplicar dicho teorema a la función dada en el intervalo $[1,6]$?
    b) ¿Se puede aplicar dicho teorema a la función dada en el intervalo $[3,11]$?
    c) Si en algún caso se cumplen las hipótesis del teorema, calcula el valor para el cual se verifica la tesis del mismo.

21. El 30 % de los habitantes de una ciudad lee el diario *La Nación*, el 13 %, el diario *XYZ* y el 6 % lee los dos.
    a) ¿Qué porcentaje de habitantes de esa ciudad no lee ninguno de los dos diarios?
    b) De entre los habitantes de esta ciudad que no leen el diario *XYZ*, se elige uno al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que lea el diario *La Nación*?

22. Dada la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\frac{x+1}{e^x}$, determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en su punto de inflexión.

23. Calcula el valor de la siguiente integral definida: $\int_0^1 x\ln(x+1)\,dx$.

24. En una encuesta a pie de calle, el 80 % de los entrevistados dice que ve la televisión o lee; el 35 % realiza ambas cosas y el 60 %, no lee. Calcula la probabilidad de que una persona elegida al azar:
    a) Vea la televisión y no lea.
    b) Lea y no vea la televisión.
    c) Haga solamente una de las dos cosas.
    d) No haga ninguna de las dos cosas.
    e) ¿Son independientes los sucesos “ver la tele” y “leer”?

25. Dada la función $f(x)=e^x+ae^{-x}$, siendo a un número real, estudiar los siguientes apartados en función de a:
    a) Hallar los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.
    b) Estudiar para qué valor, o valores, de a la función f tiene alguna asíntota horizontal.
    c) Para $a\geq 0$, hallar el área de la región acotada comprendida entre la gráfica de f, el eje OX y las rectas $x=0$ y $x=2$.

26. En una ciudad, el 40 % de la población es rubia, el 25 % tiene ojos azules y el 15 % es rubia de ojos azules. Se escoge una persona al azar:
    a) Si es rubia, ¿cuál es la probabilidad de que también tenga los ojos azules?
    b) Si tiene los ojos azules, ¿cuál es la probabilidad de que sea rubia?
    c) ¿Cuál es la probabilidad de que no sea rubia ni tenga los ojos azules?

27. De la función $f(x)=(x+a)\operatorname{sen} x$, donde a es un número real, se sabe que la integral definida $\int_0^\pi f(x)\,dx$ es tres veces el valor de la pendiente de la recta tangente a $f(x)$ en $x=0$. Calcula el valor de a.

28. Discutir razonadamente, en función del parámetro k, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+ky+z=k+2 \\ kx+y+z=k \\ x+y+kz=-2(k+1) \end{cases}$$

29. Un 20 % de los estudiantes de una universidad no utiliza el transporte público para ir a clase y un 65 % de los que sí lo utilizan, también hacen uso del comedor universitario. Halla la probabilidad de que, seleccionado al azar un estudiante de esa universidad, resulte ser usuario de los transportes públicos y del comedor universitario.

30. Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{2}{x^2-1}\right)$$

31. En un centro se ofertan tres modalidades excluyentes, A, B y C, y dos idiomas excluyentes, inglés y francés. La modalidad A es elegida por un 50 % de los alumnos; la B, por un 30 % y la C, por un 20 %.
Se sabe que ha elegido inglés el 80 % de los alumnos de la modalidad A, el 90 % de la B y el 75 % de la C, habiendo elegido francés el resto.
   a) ¿Qué porcentaje de los alumnos ha elegido francés?
   b) Si se elige al azar un estudiante de francés, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la modalidad A?

32. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=x|x-1|$.
   a) Esboza la gráfica de f.
   b) Comprueba que la recta de ecuación $y=x$ es la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=0$
   c) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f y la de dicha tangente.

33. Un examen tipo test consta de 10 preguntas, cada una con cuatro respuestas, de las cuales solo una es correcta. Si un alumno contesta al azar:
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que conteste correctamente 4 preguntas?
   b) ¿Y la de que conteste bien más de 2 preguntas?
   c) Calcular la probabilidad de que conteste mal alguna pregunta.

34. Sean A, B y X matrices cuadradas de orden n. Despeja X de la ecuación $A\cdot X\cdot B=B^2$.
Calcula la matriz X siendo $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

35. En una familia con 6 hijos, ¿cuál de estas dos opciones es más probable?
   - Que haya tantas chicas como chicos.
   - Que haya más chicas que chicos.

36. Clasifica el sistema $\begin{cases} x-2y+az=0 \\ -ay+2z=0 \\ 2x-y+(a+1)z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ en función del parámetro $a\in\mathbb{R}$, y resuélvelo para $a=-2$.

37. En un proceso de fabricación de tornillos se sabe que el 2 % son defectuosos. Los empaquetamos en cajas de 50 tornillos. Halla la probabilidad de que en una caja haya este número de tornillos defectuosos:
   a) Ninguno ; b) Uno ; c) Más de dos.

38. Consideremos las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}k\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$. Se pide:

a) Calcula, si es posible, la matriz $M=B\cdot B^t-A^t\cdot A$, donde B^t y A^t son las matrices traspuestas de las matrices A y B.

b) Determina el rango de la matriz M en función del parámetro $k\in\mathbb{R}$.

39. Un tratamiento contra una enfermedad produce una mejoría en 8 de cada 10 enfermos a los que se les aplica. Si se suministra a 5 enfermos, calcula la probabilidad de que:

a) Los cinco pacientes mejoren.

b) Al menos tres no experimenten mejoría.

40. Enuncia el teorema de valor medio de Lagrange. Explica su interpretación geométrica. Determina los valores de los parámetros $k,p\in\mathbb{R}$ para que la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{k+x}{x-1} & \text{si} \quad x\leq 0\\ e^x+p & \text{si} \quad x>0\end{cases}$ verifique las hipótesis de dicho teorema en el intervalo $[-1,3]$.

41. El 2 % de los tornillos fabricados por una máquina presentan defectos. En un lote de 2000 tornillos, ¿cuál es la probabilidad de haya menos de 50 tornillos defectuosos?

42. Calcular el siguiente límite: $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-x}{x-\operatorname{sen}x}$.

43. Una máquina que expende bebidas está regulada de modo que la cantidad de líquido que echa está distribuida normalmente con una media de 200 ml y una desviación típica de 15 ml.

a) ¿Qué porcentaje de los vasos se llenarán con más de 224 ml?

b) Si usamos 6 vasos de 224 ml de capacidad, ¿cuál es la probabilidad de que se derrame líquido únicamente en uno de los vasos?

44. Considera la matriz $M=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 6 & 0 & 3\\ x & y & z\end{pmatrix}$. Sabiendo que $|M|=2$, calcula los siguientes determinantes e indica las propiedades que utilices: $|5M^4|$, $\begin{vmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ x & y & z\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix}1 & x+6 & x\\ 2 & y & y\\ 3 & z+3 & z\end{vmatrix}$.

45. Juan encesta el 30 % de sus tiros a canasta. Si en los dos últimos partidos lanzó 20 tiros en cada uno, ¿cuál es la probabilidad de que en cada partido haya encestado más de 7 canastas? Razona si esta probabilidad es mayor, menor o igual que la probabilidad de que entre los dos partidos enceste más de 15 canastas.

46. Se sabe que la función $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{ax} & \text{si} \quad 0\leq x\leq 8\\ \dfrac{x^2-32}{x-4} & \text{si} \quad x>8\end{cases}$$

es continua en el intervalo $[0,+\infty)$.

a) Determina el valor de a.

b) Para $a=8$, calcula $\displaystyle\int_0^{10} f(x)\,dx$.

47. En el proceso de fabricación de una pieza intervienen dos máquinas: la máquina A produce un taladro cilíndrico y la máquina B secciona las piezas con un grosor determinado. Ambos procesos son independientes. El diámetro del taladro producido por A, en milímetros, es $N(23\ ,\ 0{,}5)$. El grosor producido por B es $N(11{,}5\ ,\ 0{,}4)$.

 a) Calcula qué porcentaje de piezas tienen un taladro comprendido entre 20,5 y 24 mm.
 b) Encuentra el porcentaje de piezas que tienen un grosor comprendido entre 10,5 y 12,7 mm.
 c) Suponiendo que solo son válidas las piezas cuyas medidas son las dadas en los apartados a) y b), calcula qué porcentaje de piezas aceptables se consigue.

48. Considera la matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

 a) Halla, si existe, la inversa de A.
 b) Determina los valores de m tales que $A-mI$ tiene inversa, donde I es la matriz identidad de orden 3.
 c) Calcula el rango de $A-2I$.

49. Un depósito cilíndrico construido sin la tapa superior tiene una capacidad de 27π m^3. Determina cuánto miden el radio de su base y su altura sabiendo que se ha construido de forma que su superficie sea mínima.

50. Considera las funciones $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definidas por $f(x)=-x^2-x+3$ y $g(x)=|x|$.

 a) Esboza el recinto limitado por las gráficas de f y g y calcula los puntos de corte entre ambas gráficas.
 b) Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior.

51. Se desea construir una caja sin tapadera de base cuadrada. El precio del material es de 18 euros/m^2 para los laterales y de 24 euros/m^2 para la base. Halla las dimensiones de la caja de mayor volumen que se puede construir si disponemos de 50 euros.

52. El tiempo que tardo en llegar a clase sigue una normal de media 20 minutos. He comprobado que el 94,5 % de los días llego antes de 28 minutos. Si en todo el año voy 177 días a clase, ¿cuántos días puedo estimar que tardaré menos de un cuarto de hora en llegar?

53. Halla los coeficientes a, b y c sabiendo que la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ tiene en $x=1$ un punto de derivada nula que no es extremo relativo y que la gráfica de f pasa por el punto $(1,1)$.

54. Justifica que es posible hacer un pago de 34,50 euros cumpliendo las siguientes restricciones:

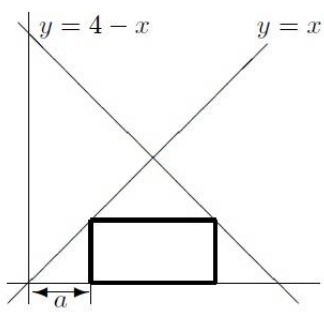
 - Utilizando únicamente monedas de 50 céntimos de euro, de 1 euro y de 2 euros.
 - Se tienen que utilizar exactamente un total de 30 monedas.
 - Tiene que haber igual número de monedas de 1 euro como de 50 céntimos y 2 euros juntas.

 ¿De cuántas maneras y con cuántas monedas de cada tipo se puede hacer el pago?

 Si se redondea la cantidad a pagar a 35 euros, justifica si es posible o no seguir haciendo el pago bajo las mismas condiciones que en el apartado anterior.

55. Se desea construir un rectángulo, como el de la figura, de área máxima. La base está situada sobre el eje OX, un vértice está en la recta $y=x$ y el otro, en la recta $y=4-x$. Se pide:

 a) Halla la altura del rectángulo en función de a (ver figura).
 b) Halla la base del rectángulo en función de a.
 c) Encuentra el valor de a que hace máximo el área del rectángulo.



56. Considera la función $f:\left(-\frac{e}{2},+\infty\right)\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\ln(2x+e)$. Haz un esbozo de la gráfica de f calculando sus puntos de corte con los ejes coordenados y calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f y los ejes de coordenadas.