Matemáticas II

Ejercicios de Binomial y Normal

Nota aclaratoria

Los ejercicios del 1 al 12 son los problemas de distribuciones Binomial y Normal propuestos en las pruebas de Evaluación para el Acceso a la Universidad en la UCLM a partir de 2017 (fecha en que aparecieron por primera vez).

1. Los operarios A, B y C producen, respectivamente, el 50%, el 30% y el 20% de las resistencias que se utilizan en un laboratorio de electrónica. Resultan defectuosas el 6% de las resistencias producidas por A, el 5% de las producidas por B y el 3% de las producidas por C. Se selecciona al azar una resistencia:

   a) Calcula razonadamente la probabilidad de que sea defectuosa.

   b) Si es defectuosa, calcula razonadamente la probabilidad de que proceda del operario A.

   Las resistencias se empaquetan al azar en cajas de cinco unidades. Calcula razonadamente la probabilidad de:

   c) Que en una caja haya exactamente tres resistencias fabricadas por B.

   d) Que en una caja haya al menos dos fabricadas por B.

n	k \ p	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40	0,45	0,49	0,50
5	0	0,9510	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,0345	0,0313
	1	0,0480	0,2036	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3292	0,3124	0,2592	0,2059	0,1657	0,1563
	2	0,0010	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3292	0,3364	0,3456	0,3369	0,3185	0,3125
	3	0,0000	0,0011	0,0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,1646	0,1811	0,2304	0,2757	0,3060	0,3125
	4	0,0000	0,0000	0,0005	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,0412	0,0488	0,0768	0,1128	0,1470	0,1563
	5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0041	0,0053	0,0102	0,0185	0,0282	0,0313

Solución

Llamemos A al suceso "la resistencia procede del operario A", B al suceso "la resistencia procede del operario B" y C al suceso "la resistencia procede del operario C". Llamemos también D al suceso "la resistencia es defectuosa". Entonces, según el enunciado, $P(A)=0,5$; $P(B)=0,3$; $P(C)=0,2$; $P(D/A)=0,06$; $P(D/B)=0,05$ y $P(D/C)=0,03$.

a) Por el teorema de la probabilidad total, tenemos:

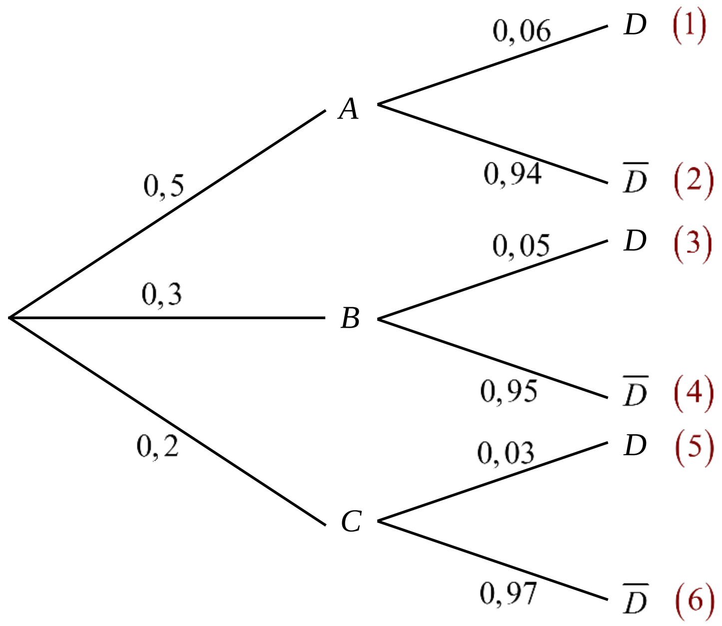
$$P(D)=P(A\cap D)+P(B\cap D)+P(C\cap D)=$$

$$=P(A)\cdot P(D/A)+P(B)\cdot P(D/B)+P(C)\cdot P(D/C)=$$

$$=0,5\cdot 0,06+0,3\cdot 0,05+0,2\cdot 0,03=0,03+0,015+0,006=0,051.$$

b) $$P(A/D)=\frac{P(A\cap D)}{P(D)}=\frac{P(A)\cdot P(D/A)}{P(D)}=\frac{0,5\cdot 0,06}{0,051}=\frac{0,03}{0,051}=0,588.$$

También puedes hacer los dos apartados anteriores haciendo uso de un diagrama de árbol como el siguiente:



Para hacer los apartados c) y d) vamos a usar una binomial $B(n, p) = B(5,\ 0,3)$. Tenemos que $n = 5$ porque las resistencias se empaquetan al azar en cajas de 5 unidades, es decir, repetimos la experiencia dicotómica “resistencia fabricada por el operario B” cinco veces. Y $p = 0,3$ porque la probabilidad de éxito es, en este caso, la de que sea fabricada por el operario B, que es igual según el enunciado a $0,3$.

c) $P(X = 3) = \binom{5}{3} \cdot 0,3^3 \cdot 0,7^2 = 10 \cdot 0,027 \cdot 0,49 = 0,1323$. Este valor se puede dar directamente buscándolo en la tabla.

d) $P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) =$

$= 0,3087 + 0,1323 + 0,0284 + 0,0024 = 04718$.

Ahora sí que hemos directamente en la tabla, para no tener que aplicar tantas veces la fórmula. Este apartado también se puede hacer así:

$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - \left[P(X = 0) + P(X = 1)\right] =$

$= 1 - (0,1681 + 0,3602) = 1 - 0,5283 = 0,4717$.

2. El tiempo de espera en una parada de autobús se distribuye según una distribución normal de media 15 minutos y desviación típica 5 minutos.

   a) Calcula razonadamente la probabilidad de esperar menos de 13 minutos.

   b) ¿Cuántos minutos de espera son superados por el 33% de los usuarios? Razona la respuesta.

a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879

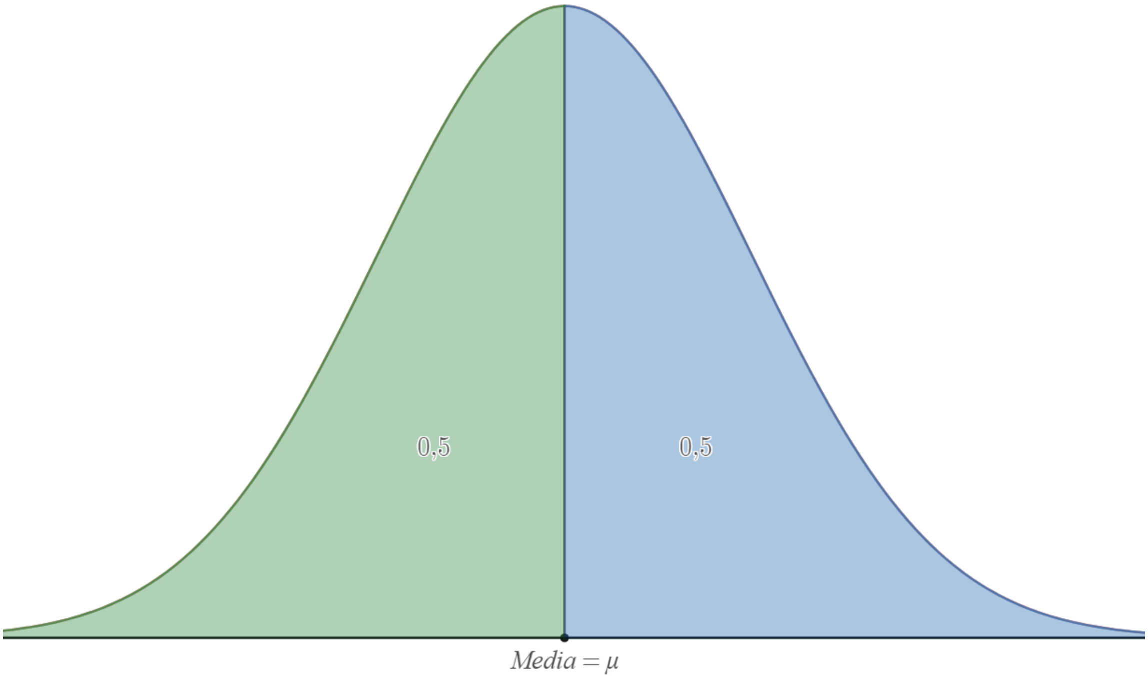
Solución

Llamemos X a la variable “tiempo de espera”. Entonces $X \rightarrow N(15,\ 5)$.

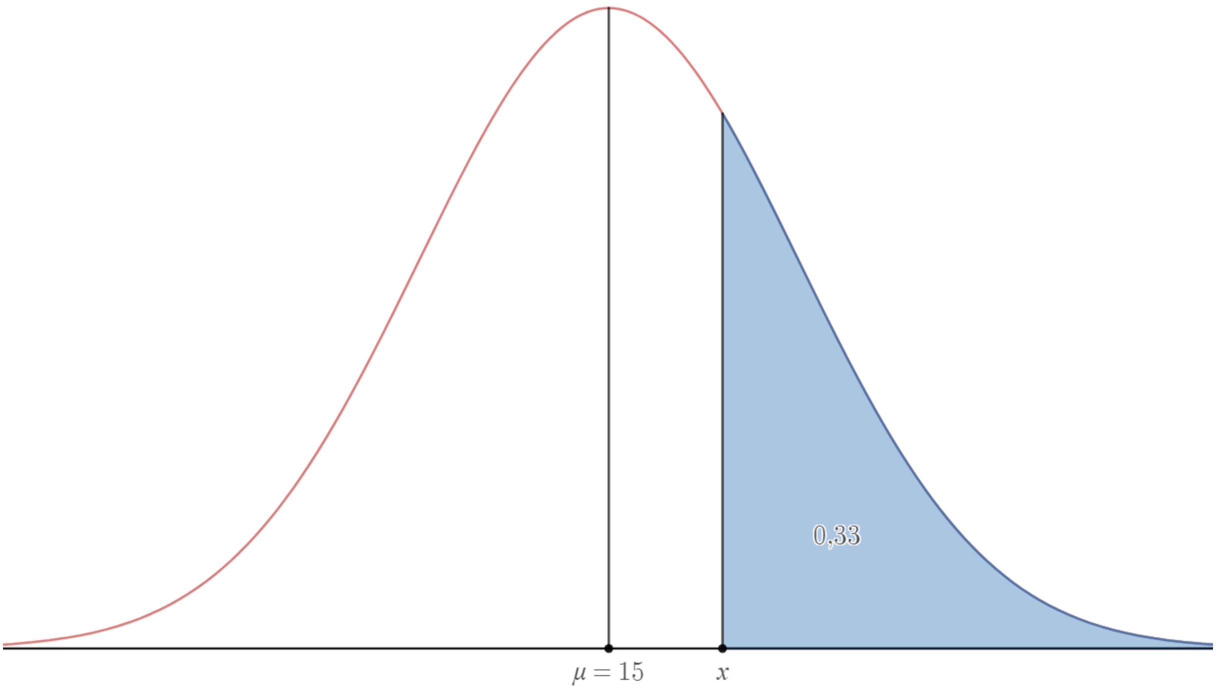
a) $P(X<13)=P\left(Z<\frac{13-15}{5}\right)=P(Z<-0,4)=P(Z>0,4)=1-P(Z<0,4)=1-0,6554=0,3446$

b) Llamemos x a esos minutos de espera superados por el 33% de los usuarios. Esto, en términos de lenguaje probabilístico se escribe así: $P(X>x)=0,33$ (la variable X significa "tiempo de espera").

Recuerda que la media de la curva normal o campana de Gauss (15 en este caso), la divide en dos partes simétricas de probabilidad igual a $0,5$ cada una. Observa la siguiente figura.



Como la probabilidad de estar por encima de x es $0,33$, entonces este valor de x tiene que estar por encima de la media, precisamente porque la probabilidad por encima de la media es $0,5$, y el área $0,33$ es ***más pequeña*** que el área $0,5$. Fíjate también con atención en la figura siguiente:



Esto es útil saberlo porque entonces $x-15$ ***será un número positivo*** y, al tipificar, sabremos que $\frac{x-15}{3}$ también es positivo. Entonces podremos aplicar las fórmulas de manera adecuada, para poder mirar finalmente en la tabla.

$$P(X > x) = 0,33 \Rightarrow P\left(Z > \frac{x-15}{5}\right) = 0,33 \Rightarrow 1 - P\left(Z < \frac{x-15}{5}\right) = 0,33 \Rightarrow P\left(Z < \frac{x-15}{5}\right) = 0,67$$

Recuerda que la igualdad $P\left(Z > \frac{x-15}{5}\right) = 1 - P\left(Z < \frac{x-15}{5}\right)$ viene de que ***la probabilidad de "estar por encima de un número positivo" es "uno menos la de estar por debajo de ese número"***. Basta tener en la cabeza otra vez la campana de Gauss y su simetría para no olvidar esto, así como las demás fórmulas teóricas.

Lo que viene ahora es la parte final, pero es muy importante, y hay que aprenderlo bien.

Observa que la última igualdad que tenemos es $P\left(Z < \frac{x-15}{5}\right) = 0,67$. ¿Cómo buscar ahora en la tabla?

No hay que mirar al principio en la 1ª columna y en la 1ª fila. ***Debemos de fijarnos en el interior de la tabla porque ahora nos dan una probabilidad***: esta es la clave. Observa la siguiente figura y verás.

a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879

Tenemos entonces que, de entre todas las probabilidades que hay, la más cercana a $0,67$ (que en este caso es exacta), se corresponde con el valor $0,44$.

Es decir, este trozo de tabla nos está diciendo que $P(X < 0,44) = 0,67$. Entonces, como también $P\left(Z < \frac{x-15}{5}\right) = 0,67$, tenemos lógicamente que: $\frac{x-15}{5} = 0,67$. Ahora, despejando el valor de x:

$x = 0,67 \cdot 5 + 15 \Rightarrow x = 18,35$. O sea, los minutos de espera que son superados por el 33% de los usuarios son, previsiblemente, $18,35$ minutos.

3. Lanzamos cinco veces una moneda trucada. La probabilidad de obtener cara es 0,6. Calcula razonadamente la probabilidad de:

   a) Obtener exactamente tres caras.

   b) Obtener más de tres caras.

n	k \ p	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40	0,45	0,49	0,50
5	**0**	0,9510	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,0345	0,0313
	1	0,0480	0,2036	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3292	0,3124	0,2592	0,2059	0,1657	0,1563
	2	0,0010	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3292	0,3364	0,3456	0,3369	0,3185	0,3125
	3	0,0000	0,0011	0,0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,1646	0,1811	0,2304	0,2757	0,3060	0,3125
	4	0,0000	0,0000	0,0005	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,0412	0,0488	0,0768	0,1128	0,1470	0,1563
	5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0041	0,0053	0,0102	0,0185	0,0282	0,0313

Solución

Se trata de un experimento binomial en el que llamaremos éxito a "salir cara". Entonces $p = 0,6$ y como lanzamos cinco veces la moneda, $n = 5$.

a) $P(X = 3) = \binom{5}{3} \cdot 0,6^3 \cdot 0,4^2 = 10 \cdot 0,216 \cdot 0,16 = 0,3456$.

Si, en lugar de usar la fórmula, queremos buscar el valor en la tabla, puesto que en la tabla p está comprendido entre 0 y $0,5$, hemos de llamar éxito a “salir cruz”; con lo que $p=0,4$. Además, “salir exactamente tres caras” es lo mismo que “salir exactamente dos cruces”, con lo que en la tabla podemos obtener fácilmente $P(X=2)=0,3456$.

b) Obtener más de tres caras es lo mismo que obtener cuatro o cinco caras, que obtener tres cruces o menos. Usando de nuevo la tabla, tomando como éxito “salir cruz”, obtenemos:

$$P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=0,0778+0,2592+0,3456+0,2304=0,913.$$

4. El tiempo de duración de las llamadas telefónicas a cierta centralita se distribuye según una distribución normal de media 5 minutos y varianza 4. Calcula razonadamente:

a) La probabilidad de que una llamada dure menos de 4,5 minutos.

b) El tiempo de duración que no es superado por el 33% de las llamadas.

a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879

Solución

Llamemos X a la variable “tiempo de duración de las llamadas telefónicas”. Entonces $X \to N(5,2)$.

Recordemos que la varianza es el cuadrado de la desviación típica, es decir, $\sigma^2=4 \Rightarrow \sigma=\sqrt{4}=2$.

a) $P(X<4,5)=P\left(Z<\dfrac{4,5-5}{2}\right)=P(Z<-0,25)=P(Z>0,25)=$

$=1-P(Z<0,25)=1-0,5987=0,4013$.

b) Si llamamos x al tiempo de duración que no es superado por el 33% de las llamadas: $P(X<x)=0,33$.

Esto indica que $x<5$, con lo que también $\dfrac{x-5}{2}<0$, y entonces $-\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{5-x}{2}>0$. Al tipificar:

$P(X<x)=P\left(Z<\dfrac{x-5}{2}\right)\overset{(1)}{=}P\left(Z>\dfrac{5-x}{2}\right)=1-P\left(Z<\dfrac{5-x}{2}\right)$ (recuerda que (1) es porque “estar por debajo de un negativo” es lo mismo que “estar por encima del correspondiente positivo”). Entonces:

$1-P\left(Z<\dfrac{5-x}{2}\right)=0,33 \Rightarrow P\left(Z<\dfrac{5-x}{2}\right)=0,67$. Buscamos ahora en la tabla la probabilidad más cercana a $0,67$, que en este caso coincide y se corresponde con el valor $0,44$, con lo que, finalmente:

$$\frac{5-x}{2}=0,44 \Rightarrow 5-x=0,88 \Rightarrow x=5-0,88 \Rightarrow x=4,12.$$

Por tanto, el tiempo de duración que no es superado por el 33% de las llamadas es de 4,12 minutos.

5. Lanzamos un dado perfecto cinco veces. Sea X la variable “Número de múltiplos de tres que pueden salir”.

a) Calcula razonadamente la media y la desviación típica de la variable X.

b) Calcula razonadamente la probabilidad de obtener cuatro o más múltiplos de tres.

n	k \ p	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40	0,45	0,49	0,50
5	0	0,9510	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,0345	0,0313
	1	0,0480	0,2036	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3292	0,3124	0,2592	0,2059	0,1657	0,1563
	2	0,0010	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3292	0,3364	0,3456	0,3369	0,3185	0,3125
	3	0,0000	0,0011	0,0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,1646	0,1811	0,2304	0,2757	0,3060	0,3125
	4	0,0000	0,0000	0,0005	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,0412	0,0488	0,0768	0,1128	0,1470	0,1563
	5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0041	0,0053	0,0102	0,0185	0,0282	0,0313

Solución

La probabilidad de salir múltiplo de tres al lanzar un dado perfecto es $p=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}=0,33$ (los únicos múltiplos de tres entre los números 1, 2, 3, 4, 5 y 6, son 3 y 6). Entonces la variable X sigue una binomial $B(5,\ 0,33)$.

a) Recordemos que la media y la desviación típica de una binomial son $\overline{x}=np$ y $\sigma=\sqrt{npq}$. Por tanto: $\overline{x}=5\cdot 0,33=1,65$ y $\sigma=\sqrt{5\cdot 0,33\cdot 0,67}=1,05$.

b) Mirando en la tabla: $P(X\geq 4)=P(X=4)+P(X=5)=0,0412+0,0041=0,0453$.

6. Las notas que se han obtenido por 1000 opositores han seguido una distribución normal de media 4,05 y desviación típica 2,5.

a) ¿Cuántos opositores han superado el 5? Razona la respuesta.

b) Si tenemos que adjudicar 330 plazas, calcula razonadamente la nota de corte.

a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879

Solución

Llamemos X a la variable "nota obtenida por un opositor". Entonces $X\rightarrow N(4,05;\ 2,5)$.

a) $P(X>5)=P\left(Z>\frac{5-4,05}{2,5}\right)=P(Z>0,38)=1-P(Z<0,38)=1-0,6480=0,352$.

Esto significa que el 35,2 % de los opositores han superado el 5, es decir, $\frac{35,2\cdot 1000}{100}=352$ opositores.

b) El porcentaje que suponen 330 plazas sobre los 1000 opositores presentados es igual al 33%. Si llamamos x a la nota de corte, tenemos que, para aprobar, esta nota habrá de ser superada únicamente por el 33% de los opositores, con lo que:

$$P(X>x)=0,33\Leftrightarrow P\left(Z>\frac{x-4,05}{2,5}\right)=0,33\Leftrightarrow 1-P\left(Z<\frac{x-4,05}{2,5}\right)=0,33\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P\left(Z<\frac{x-4,05}{2,5}\right)=1-0,33\Leftrightarrow P\left(Z<\frac{x-4,05}{2,5}\right)=0,67.$$

Mirando en la tabla, tal y como se ha hecho en ejercicios anteriores,

$$\frac{x-4,05}{2,5}=0,44\Rightarrow x=0,44\cdot 2,5+4,05\Rightarrow x=5,15.$$

7. Una parte de un examen consta de cinco peguntas tipo test. Se aprueba dicha parte si contestas correctamente al menos tres preguntas. Calcula razonadamente la probabilidad de aprobar dicha parte, contestando al azar, cuando:

   a) Cada respuesta tiene dos ítems, solamente uno verdadero.

   b) Cada respuesta tiene cuatro ítems, solamente uno verdadero.

n	k \ p	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40	0,45	0,49	0,50
5	0	0,9510	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,0345	0,0313
	1	0,0480	0,2036	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3292	0,3124	0,2592	0,2059	0,1657	0,1563
	2	0,0010	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3292	0,3364	0,3456	0,3369	0,3185	0,3125
	3	0,0000	0,0011	0,0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,1646	0,1811	0,2304	0,2757	0,3060	0,3125
	4	0,0000	0,0000	0,0005	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,0412	0,0488	0,0768	0,1128	0,1470	0,1563
	5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0041	0,0053	0,0102	0,0185	0,0282	0,0313

Solución

Se trata, en ambos, casos de experimentos binomiales con $n=5$, lo que cambia es la probabilidad de éxito, ya que en el apartado a) cada pregunta tiene dos ítems, y en el apartado b) cada pregunta tiene cuatro ítems.

a) Puesto que se contesta al azar y cada respuesta tiene dos ítems, la probabilidad de contestar correctamente a una pregunta es $p=\frac{1}{2}=0,5$. Para aprobar hay que contestar correctamente al menos a tres preguntas. Mirando en la tabla, deducimos que:

$$P(X\geq 3)=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)=0,3125+0,1562+0,0313=0,5.$$

Esto indica que, si contestamos al azar, y las preguntas son de dos ítems, aprobaremos el 50% de las veces.

b) Puesto que se contesta al azar y cada respuesta tiene cuatro ítems, la probabilidad de contestar correctamente a una pregunta es $p=\frac{1}{4}=0,25$. Para aprobar hay que contestar correctamente al menos a tres preguntas. Mirando en la tabla, deducimos que:

$$P(X\geq 3)=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)=0,0879+0,0146+0,0010=0,1035.$$

Esto indica que, si contestamos al azar, y las preguntas son de cuatro ítems, aprobaremos, aproximadamente, el 10% de las veces.

8. Un dispensador de cierto refresco está regulado de manera que cada vez descargue 25 cl. de media. Si la cantidad de líquido dispensado sigue una distribución normal de varianza 4:

   a) Calcula razonadamente la probabilidad de que descargue entre 22 y 28 cl.

   b) Calcula razonadamente la capacidad mínima de los vasos que se usen, redondeada a cl., para que la probabilidad de que se derrame el líquido sea inferior al $2,5\%$.

a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767

Solución

Llamemos X a la variable "cantidad de líquido dispensado". Entonces $X\to N(25,2)$.

a) $P(22 < X < 28) = P\left(\dfrac{22-25}{2} < Z < \dfrac{28-25}{2}\right) = P(-1{,}5 < Z < 1{,}5) = P(Z < 1{,}5) - P(Z < -1{,}5) =$

$= P(Z < 1{,}5) - P(Z > 1{,}5) = P(Z < 1{,}5) - \left[1 - P(Z < 1{,}5)\right] = 2 \cdot P(Z < 1{,}5) - 1 =$

$= 2 \cdot 0{,}9332 - 1 = 1{,}8664 - 1 = 0{,}8664$.

Este resultado viene a decir que casi el 87% de las ocasiones es dispensador descarga entre 22 y 28 cl.

b) Llamemos x a la capacidad mínima de los vasos. Queremos que esa capacidad sea lo suficientemente grande, de tal manera que la probabilidad de que se derrame líquido sea inferior a 0,025. O sea, que la probabilidad de que el líquido dispensado por la máquina sea mayor que x, sea menor que 0,025:

$P(X > x) < 0{,}025$. Está claro que x ha de ser mayor que la media, $x > 25 \Leftrightarrow \dfrac{x-25}{2} > 0$ (esto es lógico si queremos que no se derrame líquido). Pero queremos ir más allá, queremos que, caso de que se derrame líquido, sea en un porcentaje pequeño.

$$P(X > x) < 0{,}025 \Leftrightarrow P\left(Z > \frac{x-25}{2}\right) < 0{,}025 \Leftrightarrow 1 - P\left(Z < \frac{x-25}{2}\right) < 0{,}025 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P\left(Z < \frac{x-25}{2}\right) > 0{,}975.$$

Observemos que, si $P\left(Z < \dfrac{x-25}{2}\right) = 0{,}975$, entonces, mirando en la tabla: $\dfrac{x-25}{2} = 1{,}96$. Por tanto, si $P\left(Z < \dfrac{x-25}{2}\right) > 0{,}975$, habrá de ser $\dfrac{x-25}{2} > 1{,}96 \Rightarrow x > 2 \cdot 1{,}96 + 25 \Rightarrow x > 28{,}92 \cong 29$.

Dicho de otro modo, la capacidad mínima de los vasos para estar seguros de que la probabilidad de que se derrame el líquido sea inferior al 2,5%, ha de ser de unos 29 cl.

9. En una clase hay 16 chicas y 4 chicos. Cada día elijo a un estudiante al azar para que salga a la pizarra. Calcula razonadamente la probabilidad de que los cinco días laborables de la semana salgan a la pizarra:

a) Tres chicas.

b) Al menos tres chicos.

n	k \ p	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40	0,45	0,49	0,50
5	0	0,9510	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,0345	0,0313
	1	0,0480	0,2036	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3292	0,3124	0,2592	0,2059	0,1657	0,1563
	2	0,0010	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3292	0,3364	0,3456	0,3369	0,3185	0,3125
	3	0,0000	0,0011	0,0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,1646	0,1811	0,2304	0,2757	0,3060	0,3125
	4	0,0000	0,0000	0,0005	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,0412	0,0488	0,0768	0,1128	0,1470	0,1563
	5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0041	0,0053	0,0102	0,0185	0,0282	0,0313

Solución

La probabilidad de salir chico es $p = \dfrac{4}{20} = \dfrac{1}{5} = 0{,}2$. Si llamamos éxito a "salir chico", el número de chicos que salen a la pizarra en los cinco días sigue una distribución binomial con $B(5\,;\,0{,}2)$.

a) La probabilidad de que salgan tres chicas es la misma que la de que salgan dos chicos. Entonces, mirando en la tabla: $P(X = 2) = 0{,}2048$.

b) $P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) = 0{,}0512 + 0{,}0064 + 0{,}0003 = 0{,}0579$.

10. El tiempo, en horas, empleado en realizar cierta intervención quirúrgica sigue una distribución normal $N(10,2)$. Calcular razonadamente el porcentaje de estas intervenciones que se pueden realizar:

a) Entre 6,5 y 13 horas.

b) En menos de siete horas

a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767

Solución

Llamemos X a la variable "tiempo empleado en realizar la intervención quirúrgica". Entonces:

a) $P(6,5<X<13)=P\left(\frac{6,5-10}{2}<Z<\frac{13-10}{2}\right)=P(-1,75<Z<1,5)=P(Z<1,5)-P(Z<-1,75)=$

$=P(Z<1,5)-P(Z>1,75)=P(Z<1,5)-\left[1-P(Z<1,75)\right]=0,9332-(1-0,9599)=0,8931$.

Entonces, el porcentaje de intervenciones que se pueden realizar entre 6,5 y 13 horas es del 89,31%.

b) $P(X<7)=P\left(Z<\frac{7-10}{2}\right)=P(Z<-1,5)=P(Z>1,5)=1-P(Z<1,5)=1-0,9332=0,0668$.

Luego el porcentaje que se pueden realizar en menos de siete horas es del 6,68%.

11. El 1% de los cheques que recibe un banco no tienen fondos. Razona la respuesta de las siguientes preguntas:

a) Si en una hora recibe cinco cheques, ¿cuál es la probabilidad de que tenga algún cheque sin fondos? Redondea el resultado a la centésima.

b) El banco dispone de cinco sucursales en una ciudad, ¿cuál es la probabilidad de que al menos tres sucursales de esa ciudad reciban algún cheque sin fondos?

n	k \ p	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40	0,45	0,49	0,50
5	0	0,9510	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,0345	0,0313
	1	0,0480	0,2036	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3292	0,3124	0,2592	0,2059	0,1657	0,1563
	2	0,0010	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3292	0,3364	0,3456	0,3369	0,3185	0,3125
	3	0,0000	0,0011	0,0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,1646	0,1811	0,2304	0,2757	0,3060	0,3125
	4	0,0000	0,0000	0,0005	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,0412	0,0488	0,0768	0,1128	0,1470	0,1563
	5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0041	0,0053	0,0102	0,0185	0,0282	0,0313

Solución

Si llamamos éxito a "recibir cheque sin fondos", entonces $p=0,01$. Se trata de una distribución binomial $B(5;\ 0,01)$.

a) Tener algún cheque sin fondos es lo contrario de no tener ningún cheque sin fondos. Por tanto:

$P(X\geq 1)=1-P(X<1)=1-P(X=0)=1-0,9510=0,049$.

b) $P(X\geq 3)=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)=0+0+0=0$.

De aquí deducimos que recibir un cheque sin fondo, en al menos tres sucursales de las cinco que tiene el banco en la ciudad, es prácticamente imposible.

12. En una de las pruebas de acceso al cuerpo de ingenieros de la Administración Pública se realiza un test de 100 ítems a 450 opositores. Cada ítem vale un punto y se supera la prueba si se obtienen al menos 75 puntos. Suponiendo que las puntuaciones obtenidas por los opositores siguen una distribución normal de media 60 puntos y desviación típica 10 puntos, calcula razonadamente:

    a) La probabilidad de obtener 75 o más puntos.

    b) El número de opositores que obtuvieron menos de 75 puntos.

a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767

Solución

Llamemos X a la variable "puntuación obtenida". Entonces $X \to N(60,10)$.

a) $P(X \geq 75) = P\left(Z \geq \frac{75-60}{10}\right) = P(Z \geq 1{,}5) = 1 - P(Z \leq 1{,}5) = 1 - 0{,}9332 = 0{,}0668$.

b) $P(X < 75) = P\left(Z < \frac{75-60}{10}\right) = P(Z < 1{,}5) = 0{,}9332$.

Puesto que el test se realizó a 450 opositores, el número de opositores que obtuvieron menos de 75 puntos es $450 \cdot 0{,}9332 = 419{,}94$, es decir, unos 420 opositores.

Otra nota aclaratoria

A partir de ahora no se dará la parte de la tabla (ya sea de la binomial o de la normal) que es necesaria para poder resolver cada problema. El alumno deberá resolver estos problemas haciendo uso de dichas tablas, las cuales tendrá siempre a mano. Para la binomial, como alternativa a la tabla, también se puede usar la fórmula que proporciona la probabilidad de un número entero de éxitos:

$$B(n,p) \Rightarrow P(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-q} \ ; (q = 1-p)$$

13. En un determinado juego se gana cuando al lanzar dos dados se obtiene suma de puntos 10, o más. Un jugador tira en 12 ocasiones los dos dados. Se pide:

    a) Probabilidad de que gane exactamente en tres ocasiones.

    b) Probabilidad de que pierda las 12 veces que juega.

Solución

En primer lugar, la probabilidad de que, al lanzar dos dados, la suma de puntos sea 10 o más es $p = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$, ya que, de los 36 casos favorables, sólo hay 6 posibles, que son $\{(4,6),(5,5),(5,6),(6,4),(6,5),(6,6)\}$.

Puesto que el jugador tira en 12 ocasiones, se trata de una distribución binomial $B\left(12\ ,\ \frac{1}{6}\right)$, donde el éxito es que "la suma de puntos sea 10, o más".

a) $P(X=3) = \binom{12}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^9 = 0{,}197$.

b) Perder las 12 veces es lo mismo que no ganar ninguna vez. O sea: $P(X=0)=\binom{12}{0}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^0\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{12}\cong 0$.

Es decir, prácticamente nunca perderá las 12 veces.

14. Para iluminar el recinto de un estadio deportivo se quieren instalar focos. El suministrador asegura que el tiempo de vida de los focos es una variable normal con media de 1 500 h y desviación típica de 200 h.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un foco elegido al azar luzca por lo menos 1000 horas?

b) Si se compran 2 000 focos, ¿cuántos puede esperarse que luzcan al menos 1000 horas?

Solución

Llamemos X a la variable "tiempo de vida de los focos". Entonces $X\to N(1500\ ,\ 200)$.

a) $P(X\geq 1000)=P\left(Z\geq\frac{1000-1500}{200}\right)=P(Z\geq -2,5)=P(Z\leq 2,5)=0,9938$.

b) Del apartado anterior, deducimos que el 99,38 % de los focos, lucen por al menos 1000 horas. Entonces de los 2000 focos de puede esperar que luzcan al menos 1000 horas $2000\cdot\frac{99,38}{100}=1987,6$, o sea, unos 1988 focos (todos menos 12).

15. La probabilidad de que una flecha lanzada por un arquero dé en la diana es 0,4. Si se lanzan 6 flechas, halla la probabilidad de que:

a) Solo una dé en la diana.

b) Al menos una dé en la diana.

Solución

Si llamamos éxito a "dar en la diana", se trata de una distribución binomial $B(6\ ;\ 0,4)$.

a) $P(X=1)=\binom{6}{1}\cdot 0,4^1\cdot 0,6^5=0,1866$.

b) $P(X\geq 1)=1-P(X<1)=1-P(X=0)=1-\binom{6}{0}\cdot 0,4^0\cdot 0,6^6=1-0,0467=0,9553$.

16. Los pesos de 2 000 soldados presentan una distribución normal de media 75 kg y desviación típica 8 kg. Halla la probabilidad de que un soldado elegido al azar pese:

a) Más de 71 kg.

b) Entre 73 y 79 kg.

c) Menos de 80 kg.

d) Más de 85 kg.

Solución

Llamemos X a la variable "peso". Entonces $X\to N(75,8)$.

a) $P(X>71)=P\left(Z>\frac{71-75}{8}\right)=P(Z>-0,5)=P(Z<0,5)=0,6915$.

b) $P(73<X<79)=P\left(\frac{73-75}{8}<Z<\frac{79-75}{8}\right)=P(-0,25<Z<0,5)=P(Z<0,5)-P(Z<-0,25)=$

$=P(Z<0,5)-P(Z>0,25)=P(Z<0,5)-\left[1-P(Z<0,25)\right]=0,6915-(1-0,5987)=0,2902$.

c) $P(X<80)=P\left(Z<\frac{80-75}{8}\right)=P(Z<0,625)=\frac{0,7324+0,7357}{2}=0,73405$.

Observación: puesto que $0,625$ es justa la mitad de $0,62$ y $0,63$, para calcular $P(Z<0,625)$ hemos hecho justamente la media de $P(Z<0,62)=0,7324$ y $P(Z<0,63)=0,7357$.

d) $P(X>85)=P\left(Z>\frac{85-75}{8}\right)=P(Z>1,25)=1-P(Z<1,25)=1-0,8944=0,1056$.

17. En un proceso de fabricación de tornillos se sabe que el $2\,\%$ son defectuosos. Los empaquetamos en cajas de 50 tornillos. Hallar la probabilidad de que, en una caja, haya este número de tornillos defectuosos.

a) Ninguno.

b) Uno.

c) Más de dos.

Solución

Si llamamos éxito a “tornillo defectuoso” tenemos que $p=0,02$ y se trata de una distribución binomial $B(50;0,02)$.

a) $P(X=0)=\binom{50}{0}\cdot 0,02^{0}\cdot 0,98^{50}=0,3642$.

b) $P(X=1)=\binom{50}{1}\cdot 0,02^{1}\cdot 0,98^{49}=50\cdot 0,02\cdot 0,3716=0,3716$.

c) Hallaremos antes la probabilidad de que haya exactamente dos tornillos defectuosos:

$$P(X=2)=\binom{50}{2}\cdot 0,02^{2}\cdot 0,98^{48}=0,1858.$$

Entonces, la probabilidad de que haya más de dos defectuosos es “uno menos la de que haya dos o menos defectuosos”:

$$P(X>2)=1-P(X\le 2)=1-\left[P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)\right]=$$

$$=1-(0,3642+0,3716+0,1858)=1-0,9216=0,0784.$$

18. La duración de cierto tipo de motor es una variable normal con una media de 10 años y desviación típica de 2 años. El fabricante garantiza el buen funcionamiento de los motores por un periodo de 13 años. ¿Qué porcentaje de motores se espera que no cumplan la garantía?

Solución

Llamemos X a la variable “duración del motor”. Entonces $X\to N(10,2)$. Para que se cumpla la garantía los motores deberían funcionar bien hasta los de 13 años. Calculemos pues la probabilidad de que la duración del motor sea un número menor o igual que 13.

$$P(X<13)=P\left(Z<\frac{13-10}{2}\right)=P(Z<1,5)=0,9332\,.$$

Esto indica que el porcentaje de motores que se espera que no cumplan la garantía es del 93,32 %.

19. Un tratamiento contra una enfermedad produce mejoría en 8 de cada 10 enfermos a los que se les aplica. Si se suministra el tratamiento a 5 enfermos, calcula la probabilidad:

    a) De que los cinco pacientes mejoren.

    b) De que, al menos, tres no experimenten mejoría.

    Solución

    Si llamamos al éxito "que el paciente mejore", tenemos que la variable X, "número de éxitos", o sea, "número de pacientes que mejoran", sigue una distribución normal $B(5\,;\,0,8)$.

    a) $P(X=5)=\binom{5}{5}\cdot 0,8^5\cdot 0,2^0=0,32768$.

    b) Si al menos tres no experimentan mejoría, es porque la experimentan dos o menos. Entonces:

    $$P(X\le 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=$$

    $$=\binom{5}{0}\cdot 0,8^0\cdot 0,2^5+\binom{5}{1}\cdot 0,8^1\cdot 0,2^4+\binom{5}{2}\cdot 0,8^2\cdot 0,2^3=0,00032+0,0064+0,0512=0,05792\,.$$

20. El 20 % de los alumnos con mejor nota de una escuela pueden acceder a estudios superiores. Sabemos que las notas medias finales en esa escuela se distribuyen normalmente con media 5,8 y desviación típica 2. ¿Cuál es la nota media mínima que debe obtener un alumno si quiere hacer estudios superiores?

    Solución

    Llamemos X a la variable "nota media". Entonces $X\to N(5,8\,;\,2)$. Llamemos también x a la nota media mínima que debe obtener un alumno si quiere hacer estudios superiores. Puesto que solamente el 20 % de los alumnos con mejor nota pueden acceder a estudios superiores, quiere decirse que la probabilidad de estar por encima de x debe ser igual a $0,2$. Es decir, simbólicamente: $P(X\ge x)=0,2$.

    Evidentemente, la nota de corte x ha de ser mayor que la media $\mu=5,8$, ya que la media deja por encima de ella un área en la curva normal (probabilidad) igual a $0,5$ y el área (probabilidad) que deja por encima x es igual a $0,2$. Esto lo hacemos notar porque si $x>5,8$, entonces $\frac{x-5,8}{2}>0$ y, al tipificar la variable, sabremos que nos estamos encontrando con un valor de la misma mayor que cero. Esto es muy importante para saber cuál de las fórmulas hemos de utilizar para reducir la expresión a otra que nos sirva para poder mirar en la tabla de la normal estándar (ver el ejercicio número 3 de esta relación para más una explicación más detallada). Así:

    $$P(X\ge x)=0,2\Rightarrow P\left(Z\ge\frac{x-5,8}{2}\right)=0,2\Rightarrow 1-P\left(Z\le\frac{x-5,8}{2}\right)=0,2\Rightarrow P\left(Z\le\frac{x-5,8}{2}\right)=0,8$$

    Esta última expresión es la que nos sirve para mirar ahora en la tabla. Si dentro de ella buscamos, de entre todas las probabilidades que hay, la más cercana a $0,8$, veremos que ésta es $0,7995$ (en este caso por defecto). A esta probabilidad le corresponde un valor de la variable $z=0,84$. Entonces:

    $$\frac{x-5,8}{2}=0,8\Rightarrow x-5,8=1,6\Rightarrow x=7,4$$

    Es decir, la nota media mínima que debe obtener un alumno si quiere hacer estudios superiores, es 7,4.

21. Dos ajedrecistas de igual maestría juegan al ajedrez. ¿Qué es más probable: que cada uno gane dos partidas de cuatro o tres partidas de seis? (Los empates no se consideran.)

Solución

Llamando éxito a "ganar partida", si juegan cuatro partidas, podemos considerar que se trata de una distribución binomial $B(4\ ;\ 0,5)$. Y si juegan seis partidas al binomial será $B(6\ ;\ 0,5)$.

En el primer caso: $P(X=2)=\binom{4}{2}\cdot 0,5^2\cdot 0,5^2=6\cdot 0,5^4=0,375$.

Y en el segundo caso: $P(X=3)=\binom{6}{3}\cdot 0,5^3\cdot 0,5^3=20\cdot 0,5^6=0,3125$.

Por tanto, es más probable que cada uno gane dos partidas de cuatro, que cada uno gane tres partidas de seis.

22. El diámetro medio de las piezas producidas en una fábrica es de 45 mm.

a) Determina su desviación típica sabiendo que la probabilidad de que una pieza tenga un diámetro mayor que 50 mm es igual a 0,0062.

b) Si se analizan 820 piezas, ¿cuántas se estima que tendrán un diámetro comprendido entre 39,7 y 43,5 mm?

Solución

Llamemos X a la variable "diámetro medio". Supondremos que se trata de una variable que sigue una distribución normal de media $\mu=45$ y desviación σ.

a) $P(X\geq 50)=0,0062\Rightarrow P\left(Z\geq\frac{50-45}{\sigma}\right)=0,0062\Rightarrow 1-P\left(Z\leq\frac{50-45}{\sigma}\right)=0,0062\Rightarrow$

$\Rightarrow P\left(Z\leq\frac{50-45}{\sigma}\right)=1-0,0062\Rightarrow P\left(Z\geq\frac{50-45}{\sigma}\right)=0,9938$.

Mirando en la tabla de la distribución normal estándar: $\frac{50-45}{\sigma}=2,5\Rightarrow\sigma=\frac{5}{2,5}\Rightarrow\sigma=2$.

b) $P(39,7\leq X\leq 43,5)=P\left(\frac{39,7-45}{2}\leq Z\leq\frac{43,5-45}{2}\right)=P(-2,65\leq Z\leq -0,75)=$

$=P(Z\leq -0,75)-P(Z\leq -2,65)=P(Z\geq 0,75)-P(Z\geq 2,65)=$

$=(1-P(Z\leq 0,75))-(1-P(Z\leq 2,65))=(1-0,7734)-(1-0,996)=0,2266-0,004=0,2226$.

23. Ana tiene una probabilidad de 0,72 de encestar un triple. En un concurso de triples hay que tirar 15 veces. La mejor marca ha sido la de Raquel, con 13 canastas. ¿Qué probabilidad tiene Ana de batir a Raquel?

Solución

Llamemos éxito a "Ana encesta un triple". Entonces $p=0,72$ y se trata de una distribución binomial con $n=15$. La probabilidad de que Ana bata a Raquel es la de que Ana enceste más de 13 veces, es decir:

$P(X>13)=P(X=14)+P(X=15)+P(X=16)=$

$=\binom{16}{14}\cdot 0,72^{14}\cdot 0,28^2+\binom{16}{15}\cdot 0,72^{15}\cdot 0,28^1+\binom{16}{16}\cdot 0,72^{16}\cdot 0,28^0=0,0947+0,0324+0,0052=0,1323.$

24. Una compañía de autobuses sabe que el retraso en la llegada sigue una distribución normal de media 5 min, y que el 68,26 % de los autobuses llega entre 2 min y 8 min tarde.

    a) ¿Cuál es la desviación típica?

    b) ¿Cuál es la probabilidad de que un autobús llegue puntual o antes de la hora?

Solución

Llamemos X a la variable "minutos de retraso o que llega tarde un autobús". Entonces $X \to N(5,\sigma)$.

a) Simbólicamente, el hecho de que el 68,26 % de los autobuses llegue entre 2 min y 8 min tarde se escribe así: $P(2<X<8)=0,6826$. Ahora tipificamos la variable y hallamos el valor de σ.

$$P(2<X<8)=P\left(\frac{2-5}{\sigma}<Z<\frac{8-5}{\sigma}\right)=P\left(-\frac{3}{\sigma}<Z<\frac{3}{\sigma}\right)=P\left(Z<\frac{3}{\sigma}\right)-P\left(Z<-\frac{3}{\sigma}\right)=$$

$$=P\left(Z<\frac{3}{\sigma}\right)-P\left(Z>\frac{3}{\sigma}\right)=P\left(Z<\frac{3}{\sigma}\right)-\left[1-P\left(Z<\frac{3}{\sigma}\right)\right]=2\cdot P\left(Z<\frac{3}{\sigma}\right)-1$$. Entonces:

$$2\cdot P\left(Z<\frac{3}{\sigma}\right)-1=0,6826\Rightarrow P\left(Z<\frac{3}{\sigma}\right)=\frac{0,6826+1}{2}\Rightarrow P\left(Z<\frac{3}{\sigma}\right)=0,8413.$$

Buscando en la tabla de la distribución normal estándar o tipificada, tenemos que $\frac{3}{\sigma}=1\Rightarrow\sigma=3$.

b) Llegar puntual o antes de la hora es que el retraso sea menor o igual que cero:

$$P(X\leq 0)=P\left(Z\leq\frac{0-5}{3}\right)=P(Z\leq -1,67)=P(Z\geq 1,67)=1-P(Z\leq 1,67)=1-0,9525=0,0475.$$

25. Un examen tipo test consta de 10 preguntas, cada una con cuatro respuestas, de las cuales solo una es correcta. Si un alumno contesta al azar:

    a) ¿Cuál es la probabilidad de que conteste correctamente a 4 preguntas?

    b) ¿Y la de que conteste bien más de 2 preguntas?

    c) Calcular la probabilidad de que conteste mal alguna pregunta.

Solución

Si llamamos éxito a "respuesta correcta", tenemos que, si el alumno contesta al azar, $p=\frac{1}{4}=0,25$. Puesto que el test consta de 10 preguntas, el número de respuestas correctas se distribuye entonces mediante una binomial $B(10\,;0,25)$.

a) $P(X=4)=\binom{10}{4}\cdot 0,25^4\cdot 0,75^6=210\cdot 0,0039\cdot 0,178=0,146$.

b) La probabilidad de que conteste bien más de 2 preguntas es la contraria de la que conteste bien a 2 o menos: $P(X>2)=1-P(X\leq 2)=1-\left[P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)\right]=$

$$=1-\left[\binom{10}{0}\cdot 0,25^0\cdot 0,75^{10}+\binom{10}{1}\cdot 0,25^1\cdot 0,75^9+\binom{10}{2}\cdot 0,25^2\cdot 0,75^8\right]=1-0,5256=0,4744$$

c) Contestar mal alguna pregunta es lo contrario de no contestar bien a ninguna. Por tanto:

$$P(\text{mal alguna pregunta})=1-P(X=0)=1-\binom{10}{0}\cdot 0,25^0\cdot 0,75^{10}=1-0,0563=0,9437\,.$$

26. En una familia con 6 hijos, ¿cuál de estas dos alternativas es más probable?

a) Que haya tantas chicas como chicos.

b) Que haya más chicas que chicos.

Solución

Supondremos, para poder resolver este problema, que la probabilidad de tener chico es la misma que la de tener chica, es decir, $p=0,5$. Como la familia tiene 6 hijos, la variable "número de chicas" se distribuye según una binomial $B(6\ ;\ 0,5)$.

a) Que haya tantas chicas como chicos es que haya tres chicas y tres chicos, es decir:

$$P(X=3)=\binom{6}{3}\cdot 0,5^3\cdot 0,5^3=20\cdot 0,5^6=0,3125\,.$$

b) $P(X>3)=P(X=4)+P(X=5)+P(X=6)=\binom{6}{4}\cdot 0,5^4\cdot 0,5^2+\binom{6}{5}\cdot 0,5^5\cdot 0,5^1+\binom{6}{6}\cdot 0,5^6\cdot 0,5^0=$

$$=15\cdot 0,5^6+6\cdot 0,5^6+0,5^6=22\cdot 0,5^6=0,34375\,.$$

27. En una empresa que fabrica microcircuitos se ha comprobado que el 10 % de estos son defectuosos. Si se compra un paquete de 300 microcircuitos procedentes de la fábrica, determina:

a) La probabilidad de que se encuentren más de un 9 % de microcircuitos defectuosos.

b) La probabilidad de que el número de microcircuitos defectuosos esté entre 20 y 30.

Solución

Si llamamos éxito a "un microcircuito es defectuoso", tenemos que $p=0,1$ y la variable "número de microcircuitos defectuosos" sigue una binomial $B(300\ ;\ 0,1)$. Puesto que $np=300\cdot 0,1=30>5$ y $nq=300\cdot 0,9=270>5$, podemos aproximar esta binomial por una distribución normal de media $\mu=np=30$, y desviación $\sigma=\sqrt{npq}=\sqrt{300\cdot 0,1\cdot 0,9}=5,2$.

a) El $9\,\%$ de 300 es $\dfrac{9\cdot 300}{100}=27$. Por tanto:

$$P(X>27)=P\left(Z>\frac{27-30}{5,2}\right)=P(Z>-0,58)=P(Z>0,58)=$$

$$=1-P(Z<0,58)=1-0,7190=0,281$$

b) $P(20<X<30)=P\left(\dfrac{20-30}{5,2}<Z<\dfrac{30-30}{5,2}\right)=P(-1,92<Z<0)=P(Z<0)-P(Z<-1,92)=$

$$=P(Z<0)-P(Z>1,92)=P(Z<0)-\left[1-P(Z<1,92)\right]=0,5-(1-0,9726)=0,4726\,.$$

28. En un hospital, el 54 % de los nacimientos son niñas. Halla la probabilidad de que, de 2500 nacimientos, el número de niños esté entre 1200 y 1400, ambos inclusive.

Solución

Llamemos éxito a "ser niño". Entonces $p = 0,46$ y la variable "número de niños nacidos" sigue una binomial $B(2500\ ;\ 0,46)$. Puesto que $np = 2500 \cdot 0,46 = 1150 > 5$ y $nq = 2500 \cdot 0,54 = 1350 > 5$, se puede aproximar esta binomial por una distribución normal de media $\mu = np = 1150$ y desviación $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{2500 \cdot 0,46 \cdot 0,54} = 24,92$. De este modo:

$$P(1200 < X < 1400) = P\left(\frac{1200-1150}{24,92} < Z < \frac{1400-1150}{24,92}\right) = P(2 < Z < 10,03) =$$

$$= P(Z < 10,03) - P(Z < 2) = 1 - 0,9772 = 0,0228.$$

La probabilidad $P(Z < 10,03)$ es igual a uno porque si, ya en la tabla de la normal estándar o tipificada, tenemos que $P(Z < 3,99) = 1$, con mucha más razón la probabilidad de estar por debajo de $10,03$ es igual a uno, pues $10,03 > 3,99$.