1. Halla el ángulo que forman las rectas r y s en cada caso. Comprueba, previamente, que se cortan:

a) $r \equiv \begin{cases} x = 5 - 2\lambda \\ y = 4 + 3\lambda \\ z = -2\lambda \end{cases}$, $s \equiv \begin{cases} x = 5 - \lambda \\ y = 4 + 5\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$; b) $r \equiv \begin{cases} x - y = 3 \\ y + z = 15 \end{cases}$, $s \equiv \begin{cases} x = 3 + 3\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 15 + 5\lambda \end{cases}$; c) $r \equiv \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$, $s \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

2. Halla el valor de m para que $r \equiv \begin{cases} x = 2 - 5\lambda \\ y = \lambda \\ z = -2 - \lambda \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = m\lambda \end{cases}$ formen un ángulo de 90°.

3. Halla, en cada caso, el ángulo que forman la recta y el plano:

a) $r \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y+3}{4} = \frac{z}{2}$, $\pi \equiv x - 2y - z + 1 = 0$; b) $r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = -2 \end{cases}$, $\pi \equiv 2x - y + z = 0$;

c) $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z}{1}$, $\pi \equiv x + z = 17$

4. Calcula, en cada caso, el ángulo que forman los siguientes planos:

a) $\pi_1 \equiv z = 3$, $\pi_2 \equiv x - y + 2z + 4 = 0$; b) $\pi_1 \equiv 2x + y - 3 = 0$, $\pi_2 \equiv x + z - 1 = 0$

5. Calcula los tres ángulos de los triángulos cuyos vértices son:

a) $A(0,0,0)$, $B(1,2,1)$, $C(3,1,1)$; b) $A(2,7,3)$, $B(1,2,5)$, $C(-1,-2,5)$

6. Calcula el ángulo que forma el plano $\pi \equiv x - 2y + z = 0$ con cada uno de los ejes de coordenadas.

7. Calcula el valor de m para que las rectas $r \equiv \begin{cases} 1 + \lambda \\ y = \sqrt{2}\lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 + m\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$ formen un ángulo de 60°.

8. Tenemos la recta $r \equiv \begin{cases} x = 8\lambda \\ y = 2 \\ z = 3 - 6\lambda \end{cases}$ y los planos $\pi_1 \equiv x + 2y - z = 1$ y $\pi_2 \equiv x - y + z = 3$.

a) Halla el punto P en el que se cortan la recta r y el plano π_1.

b) Calcula las coordenadas del punto Q donde se cortan r y π_2.

c) Obtén la distancia que separa a los puntos P y Q de los apartados anteriores.

9. Calcula, en cada caso, la distancia entre el punto P y el plano π:

a) $P(2,-3,1)$, $\pi \equiv 3x - 4z = 34$; b) $P(0,1,3)$, $\pi \equiv x - y - 2z + 3 = 0$;

c) $P(2,0,1)$, $\pi \equiv x + y - 2z = 0$; d) $P(3,-4,1)$, $\pi \equiv y = 3$

10. Calcula la distancia entre el punto $Q(2,-1,0)$ y el plano que contiene al punto $P(2,0,4)$ y a la recta $s \equiv \begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = 2 + 3\lambda \\ z = 4 \end{cases}$.

11. Halla la distancia entre los siguientes pares de planos:

a) $\pi_1 \equiv x - 2y + 3 = 0$, $\pi_2 \equiv 2x - 4y + 1 = 0$; b) $\pi_1 \equiv 3x - 2y + z - 2 = 0$, $\pi_2 \equiv 2x - y + z = -5$

12. Halla la distancia de la recta r al plano π en cada caso:

a) $r \equiv \begin{cases} x = 2+4\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = -1+7\lambda \end{cases}$, $\pi \equiv 3x-4y-3=0$; b) $r \equiv \begin{cases} y = 3+2\lambda \\ y = 5 \\ z = 4+\lambda \end{cases}$, $\pi \equiv 7x-2y-z+1=0$

13. Calcula la distancia que hay entre el punto $P(3,1,6)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 4+4\lambda \\ y = 2+\lambda \\ z = -1-3\lambda \end{cases}$ mediante los siguientes pasos:

    a) Halla un plano, π, que sea perpendicular a r y que contenga a P.
    b) Obtén la intersección del plano hallado, π, con r. Llama a ese punto Q.
    c) Calcula la distancia de P a Q.

14. Calcula la distancia que hay entre la recta y el punto del ejercicio anterior mediante los siguientes pasos:

    a) Halla el vector $\overrightarrow{PQ}$, siendo Q un punto de la recta r.
    b) Halla el área del paralelogramo descrito por el vector $\overrightarrow{PQ}$ y el vector de dirección de r.
    c) Divide el área calculada entre el módulo del vector de dirección de r.

15. Halla la distancia entre el punto $P(2,2,-11)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 9+12\lambda \\ y = -1-3\lambda \\ z = 6+5\lambda \end{cases}$ siguiendo los pasos de los ejercicios anteriores.

16. Calcula la distancia que hay entre las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 4\lambda \\ y = -10-3\lambda \\ z = 9+5\lambda \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 2-12\lambda \\ y = 1+9\lambda \\ z = 4+\lambda \end{cases}$. Para ello sigue estos pasos:

    a) Halla el plano π que contenga a la recta r y sea paralelo a la recta s.
    b) Halla la distancia de un punto (el que quieras) de s al plano π.

17. Halla la distancia que hay las rectas $r \equiv \begin{cases} x = -7-5\lambda \\ y = 4+\lambda \\ z = 19+12\lambda \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 10-10\lambda \\ y = -2+5\lambda \\ z = 26-24\lambda \end{cases}$ siguiendo los pasos del ejercicio anterior.

18. Calcula la distancia que hay entre las rectas $r \equiv \begin{cases} x = -2+3\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 1+\lambda \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 1-\lambda \\ y = 5\lambda \\ z = -2+\lambda \end{cases}$. Para ello, haz lo siguiente:

    a) Halla el vector $\overrightarrow{PQ}$, siendo P y Q puntos de las rectas r y s, respectivamente.
    b) Halla el volumen V del paralelepípedo descrito por $\overrightarrow{PQ}$ y los vectores directores de r y s.
    c) Halla el área A del paralelogramo descrito por los vectores directores de r y s.
    d) La distancia de r a s coincide con el resultado de dividir V entre A.

19. Halla el área de cada uno de los triángulos ABC donde:

a) $A(2,7,3)$, $B(1,-5,4)$, $C(7,0,11)$; b) $A(3,-7,4)$, $B(-1,2,5)$, $C(-5,11,6)$

20. Calcula, en cada caso, el volumen del tetraedro de vértices:
 a) $(2,1,4)$, $(1,0,2)$, $(4,3,2)$, $(1,5,6)$; b) $(4,1,2)$, $(2,0,1)$, $(2,3,4)$, $(6,5,1)$
21. Calcula el área total y el volumen del tetraedro de vértices $A(2,3,1)$, $B(4,1,-2)$, $C(6,3,7)$ y $D(-5,-4,8)$.
22. Calcula el volumen del tetraedro determinado por los ejes de coordenadas y el plano $\pi \equiv 6x-5y+3z-30=0$.
23. Halla la ecuación del plano π perpendicular a la recta $r \equiv \dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y-4}{3}=\dfrac{z}{4}$ y que pasa por el punto $(-1,1,0)$, y calcula el volumen de la figura limitada por π y los tres planos coordenados.
24. Justifica cuáles de las siguientes ecuaciones corresponden a esferas y di su centro y su radio:
 a) $x^2+y^2-2x+4y-8=0$; b) $2x^2-2y^2+2z^2+4x-16$; c) $2x^2+2y^2+2z^2+4x-16=0$;
 d) $x^2+3y^2+z^2-2xz-4=0$; e) $3x^2+3y^2+3z^2+6x-12z-3=0$;
 f) $3x^2+3y^2+3z^2+6x-12z-30=0$; g) $2x^2+2y^2+2z^2-4x+6y-3/2=0$
25. Halla la ecuación de las siguientes esferas:
 a) Centro $(1,0,-5)$ y radio 1.
 b) Diámetro AB con $A(3,-4,2)$ y $B(5,2,0)$.
 c) Centro $(4,-2,3)$ y tangente al plano $x-z=0$.
 d) Centro $(3,-1,2)$ y tangente al plano YZ.
26. Halla el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a $(2,-1,4)$ es igual a 7.
27. Halla el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a $A(-2,3,4)$ sea el doble de la distancia a $B(3,-1,-2)$.
28. Dados $A(4,2,0)$ y $B(2,6,-4)$, halla el lugar geométrico de los puntos P tales que PA sea perpendicular a PB.
29. Halla los puntos de la recta $r \equiv x-1=y+2=z$ que equidistan de los planos $\pi_1 \equiv 4x-3y-1=0$ y $\pi_2 \equiv 3x+4y-1=0$.
30. Dada la recta $r \equiv \begin{cases} x+y-z+1=0 \\ x+2y+z=0 \end{cases}$ y el plano $\sigma \equiv 2x-y+3z+1=0$:
 a) Halla la ecuación del plano π que contiene a la recta r y el perpendicular al plano σ.
 b) Obtén las ecuaciones paramétricas de la recta determinada por π y σ.
 c) Halla el ángulo que forma la recta r con el plano σ.
31. Si $r \equiv \begin{cases} x-2z+3=0 \\ y-z-4=0 \end{cases}$ y $\pi \equiv x+2y+3z-1=0$, halla la ecuación de una recta situada en el plano π, que pase por el punto $P(2,1,-1)$ y sea perpendicular a r.
32. Determina la recta perpendicular común a las rectas $s \equiv \begin{cases} x+y=z+4 \\ x+2y=7 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x-2=0 \\ y+3=0 \end{cases}$.
33. Dadas las rectas $r_1 \equiv \dfrac{x}{4}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z}{2}$ y $r_2 \equiv \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-p}{p-1}=\dfrac{x-3}{3}$:
 a) Halla p para que las rectas r_1 y r_2 sean perpendiculares.
 b) Calcula su punto de intersección y la ecuación del plano que las contiene para el valor de p que has hallado.

34. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $(1,2,1)$ y corta perpendicularmente a la recta siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} x-y-z=1 \\ x+z=2 \end{cases}$$

35. Los vértices del triángulo ABC son los puntos de corte del plano $2x+y-3z=6$ con los ejes de coordenadas. Halla la ecuación de la altura que parte del vértice B que está en el eje Y.

36. Halla el punto P de la recta $r \equiv \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{3}$ que equidiste de los planos:

$$\alpha \equiv x+y+z=-3 \text{ y } \beta \equiv \begin{cases} x=-3+\lambda \\ y=-\lambda+\mu \\ z=-6+\mu \end{cases}$$

37. Determina la ecuación de un plano π paralelo al plano $\sigma \equiv x-2y+3z+6=0$ y que dista 12 unidades del origen de coordenadas.

38. Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x=-3+\lambda \\ y=-2+5\lambda \\ z=0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x=3 \\ y=-6+4\lambda \\ z=2+\lambda \end{cases}$

a) Halla las ecuaciones de la recta que corta perpendicularmente a r y a s.

b) Calcula la distancia entre r y s.

39. Sea r la recta de intersección de los planos $ax+9y-3z=8$ y $x+ay-z=0$. Determina el valor de a para que:

a) Los dos planos sean paralelos.

b) Los dos planos sea perpendiculares.

c) La recta r corte al plano XY en un punto cuya distancia al origen de coordenadas sea igual a $\sqrt{2}$.

40. Dibuja un cubo de 6 unidades de lado, con un vértice en el origen y los tres vértices contiguos sobre los ejes de coordenadas. Halla la mínima distancia de una diagonal del cubo a una diagonal de una cara, sabiendo que las rectas que contienen a las diagonales se cruzan.

41. Halla la ecuación del plano cuyo punto más próximo al origen es $(1,3,2)$.

42. Halla los puntos simétricos de $P(1,2,3)$ respecto del plano $\alpha \equiv x-3y-2z+4=0$ y respecto de la recta $r \equiv \begin{cases} x-y+3=0 \\ 4x-z=0 \end{cases}$.

43. Dada la recta $r \equiv \begin{cases} x+y=0 \\ x-z=0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv 2x-y+2z+1=0$,

a) Encuentra los puntos de r que disten $\frac{1}{3}$ del plano π.

b) Obtén los puntos de π que distan $\frac{1}{3}$ de los puntos hallados en el apartado anterior.

44. Dados los puntos $A(-1,3,-1)$, $B(-3,1,-7)$ y $C(0,5,1)$:

a) Prueba que son los vértices de un triángulo.

b) Halla la longitud del segmento que determina el punto B y su proyección sobre AC.

45. Un cuadrado tiene uno de sus lados sobre la recta $r \equiv \begin{cases} 3x+2y+2z=0 \\ x-2y+2z=0 \end{cases}$ y otro sobre $s \equiv \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+5}{-2}$

a) Calcula el área del cuadrado.

b) Si uno de los vértices del cuadrado es el $(0,0,0)$, ¿cuál es el otro vértice situado sobre la recta r?

46. Halla el punto del plano de ecuación $x-z=3$ que está más cerca del punto $P(3,1,4)$, así como la distancia entre el punto P y el plano dado.

47. Se consideran los puntos $P(2,1,-1)$, $Q(1,4,1)$ y $R(1,3,1)$:

a) Comprueba que no están alineados y halla el área del triángulo que determinan.

b) Si desde el punto $V(1,1,-1)$ se trazan rectas a cada uno de los puntos P, Q y R, se obtiene una pirámide triangular o tetraedro. Halla la altura de dicha pirámide y su volumen.

48. Halla el volumen de un paralelepípedo de bases $ABCD$ y $EFGH$ sabiendo que $A(1,0,0)$, $B(2,3,0)$, $C(4,0,5)$ y $E(7,6,3)$. Halla las coordenadas de los restantes vértices del paralelepípedo.

49. Dadas las rectas $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{1}$ y $s \equiv \begin{cases} x-y+z=2 \\ 3x-y-z=-4 \end{cases}$, determina su posición relativa y el área de uno de los cuadrados, dos de cuyos lados están sobre r y s.

50. Halla la ecuación de la proyección ortogonal r' de la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{2}$ sobre el plano $\alpha \equiv x-3y+2z+12=0$.

51. Dadas las rectas $r \equiv \frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$ y $s \equiv \begin{cases} x=\mu \\ y=-\mu \\ z=-\mu \end{cases}$, halla los puntos que dan la mínima distancia y determina la ecuación de la perpendicular común a r y a s.

52. Los puntos $P(0,1,0)$ y $Q(-1,1,1)$ son dos vértices de un triángulo, y el tercero, S, pertenece a la recta $r \equiv \begin{cases} x=4 \\ z=1 \end{cases}$. La recta que contiene a P y a S es perpendicular a la recta r.

a) Determina las coordenadas de S.

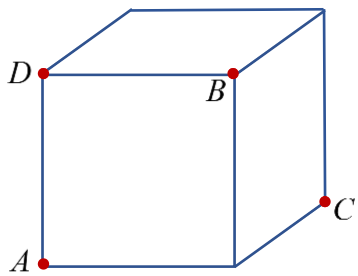
b) Calcula el área del triángulo PQS.

53. Sea un cuadrado de centro el punto $C(1,1,-1)$ y uno de cuyos lados está en la recta $s \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{0}$.

a) Halla la ecuación del plano en el que se encuentra el cuadrado.

b) Calcula la longitud del lado del cuadrado.

54. Dada la siguiente figura:



Calcula el ángulo que forma la recta BC con la recta que une B con el punto medio del lado AD.

55. Sea la recta $r \equiv \begin{cases} 3x+2y-z-1=0 \\ x+y-1=0 \end{cases}$.

a) Determina la ecuación de la recta s que corta perpendicularmente a r y pasa por $(0,2,2)$, y las coordenadas del punto P intersección de r y s.

b) Halla la ecuación del plano π que contiene a r y a s, y de la recta t perpendicular a π que pasa por el punto P.

c) Si Q es cualquier punto de t, explica, sin hacer ningún cálculo, qué relación hay entre la distancia de Q a r, de Q a s, y de Q a π.

56. Halla la distancia del punto $P(1,-1,3)$ a la recta que pasa por los puntos $Q(1,2,1)$ y $R(1,0,-1)$. Encuentra todos los puntos S del plano determinado por P, Q y R, de manera que el cuadrilátero de vértices P, Q, R y S sea un paralelogramo.

57. Halla el plano de la familia $mx+y+z-(m+1)=0$ que está situado a distancia 1 del origen de coordenadas.

58. Halla la distancia de la recta $r \equiv \begin{cases} x=3z+3 \\ y=4z-1 \end{cases}$ a los ejes coordenados.

59. Determina el valor de a y b para que los tres planos siguientes se corten en una misma recta.

$$\begin{cases} x+ay+z=0 \\ x+y-2z=b \\ -2x+y+z=-2 \end{cases}$$

Halla el simétrico del origen de coordenadas respecto de la recta común a los tres planos dados.

60. Los puntos $A(0,0,0)$ y $B(1,1,1)$ son dos de los vértices de un triángulo, cuyo tercer vértice, C, está contenido en la recta $r \equiv \begin{cases} x=2y \\ z=1 \end{cases}$. Si el área del triángulo es $\sqrt{2}/2$, ¿cuáles pueden ser las coordenadas de C?

61. Halla el lugar geométrico de los puntos $P(x,y,z)$ que equidistan de los puntos $A(1,-1,0)$ y $B(2,3,-4)$. Comprueba que obtienes un plano perpendicular a $\overrightarrow{AB}$ y que pasa por el punto medio de AB.

62. Halla el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los planos de ecuaciones $\alpha \equiv 3x+y-2z+1=0$ y $\beta \equiv x-3y+2z-3=0$.

63. Halla las ecuaciones del lugar geométrico de todos los puntos del plano $x=y$ que distan 1 del plano $2x-y+2z=2$.

64. Halla el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los planos de ecuaciones $\alpha \equiv 3x-4y+5=0$ y $\beta \equiv 2x-2y+z+9=0$. ¿Qué puntos del eje Y equidistan de ambos?

65. Calcula el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^3$ que están a la misma distancia de $P(-1,2,5)$ y $Q(-3,4,1)$. ¿A qué distancia se encuentra el punto P de dicho conjunto?

66. Halla la ecuación del plano tangente a la esfera $x^2+y^2+z^2-2x-4y+4=0$ en el punto $P(1,2,1)$. ¿Cuál es el punto diametralmente opuesto a P en la esfera dada?

67. Halla la ecuación de la esfera tangente a los planos $x-2z-8=0$ y $2x-z+5=0$ y cuyo centro pertenece a la recta $r \equiv \begin{cases} x=-2 \\ y=0 \end{cases}$.

68. La esfera $(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=25$ corta al plano $2x-2y+z-2=0$ en una circunferencia. Halla su centro y su radio.

69. Halla la ecuación de la esfera que pasa por los puntos $A(4,1,-3)$ y $B(3,2,1)$ y que tiene su centro en la recta $\frac{x-8}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+4}{-1}$. ¿Cuál es la ecuación del plano tangente en B a dicha esfera?

70. Halla el lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a $(2,0,0)$ y $(-2,0,0)$ se igual a 6.

71. Halla el lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de $(0,0,3)$ y del plano $z=-3$.

72. Halla el lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias a $(0,5,0)$ y $(0,-5,0)$ sea igual a 4.

73. ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a los puntos $(2,3,4)$ y $(2,3,-4)$ es igual a 8?

74. Halla el lugar geométrico de los puntos que equidistan del plano $x=y$ y del punto $(0,-2,1)$.

75. ¿Verdadero o falso? Justifica la respuesta y pon ejemplos.
   a) La ecuación $ax+by+cz+d=0$ representa un plano:
      I) Si $a=0$ y $b=0$ el plano es perpendicular al plano XY.
      II) Si $b=0$ y $c=0$ el plano es paralelo al plano YZ.
      III) Si $a=0$ y $c=0$ el plano es perpendicular al eje Y.
   b) Si $P\in r$ hay infinitas rectas perpendiculares a r que pasan por P.
   c) No es posible calcular la distancia entre el plano $x+y-2z-5=0$ y la recta $x=y=z$.
   d) El punto $P'(2,6,-3)$ es el simétrico de $P(-1,3,3)$ respecto del plano $x+y-2z-5=0$.
   e) No es posible hallar el punto de corte de las rectas $r\equiv\frac{x-1}{2}=\frac{2y-1}{-6}=\frac{2z-3}{6}$ y $s\equiv\frac{x-3}{-3}=\frac{2y+3}{2}=\frac{z}{4}$.
   f) La distancia entre los planos $\alpha\equiv x+y-z=1$ y $\beta\equiv\begin{cases}x=1+t+s\\y=1-t\\z=2+t\end{cases}$ es igual a $\sqrt{3}$.
   g) El plano $2x+y+z=2$ determina con los ejes de coordenadas un triángulo de área $\sqrt{6}$.
   h) Si $A(x_1,y_1,z_1)$ es un punto que está contenido en el plano $\pi\equiv ax+by+cz+d=0$ y $B(x_2,y_2,z_2)$ es un punto tal que $\overrightarrow{AB}\cdot(a,b,c)=0$, entonces $B\in\pi$.

76. La recta $r\equiv\begin{cases}\pi_1\equiv 2x+3y-z-4=0\\\pi_2\equiv x-2y+z+1=0\end{cases}$ es la intersección de los planos π_1 y π_2. El conjunto de todos los planos que contienen a r se llama ***haz de planos*** de arista r, y su expresión analítica es:

$$a(2x+3y-z-4)+b(x-2y+z+1)=0$$

Para cada par de valores de a y b (salvo para $a=0$ y $b=0$), se obtiene la ecuación de un plano del haz.
   a) Halla el plano del haz que pasa por el origen de coordenadas.
   b) ¿Para qué valor de k uno de los planos del haz es perpendicular a la recta $r\equiv\frac{x}{3}=\frac{y-2}{5}=\frac{z}{k}$? ¿Cuál es ese plano?
   c) Halla dos puntos que pertenezcan a todos los planos del haz anterior.
   d) Escribe la expresión del haz de planos cuya arista es la recta $s\equiv\frac{x-5}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-3}{1}$.
   e) ¿Cuál de los planos del este haz dista más del origen de coordenadas?