1. Dado el segmento AB, con $A(-2,1,0)$ y $B(1,3,-2)$, halla los puntos P y Q tales que $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AQ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.
2. Calcula el valor de a y b para que los puntos $A(1,2,-1)$, $B(3,0,-2)$ y $C(4,a,b)$ estén alineados.
3. Halla los puntos P y Q tales que $\overrightarrow{AQ}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AQ}$, siendo $A(2,0,1)$ y $B(7,5,-4)$.
4. Halla el simétrico del punto $A(-2,3,0)$ respecto del punto $M(1,-1,2)$.
5. Los puntos $A(1,3,-1)$, $B(2,0,2)$ y $C(4,-1,-3)$ son vértices consecutivos de un paralelogramo. Halla el cuarto vértice, D, y el centro del paralelogramo.
6. Halla las ecuaciones paramétricas e implícitas de las siguientes rectas:
   a) Pasa por $A(-3,2,1)$ y $B(-5/2,3/2,0)$.
   b) Pasa por $A(0,1,-1)$ y es paralela a la recta que pasa por $B(1,1,-1)$ y $C(2,0,1)$.
7. Escribe las ecuaciones implícitas de los lados del triángulo de vértices $A(1,0,1)$, $B(-2,0,1)$ y $C(0,3,1)$.
8. Comprueba si existe alguna recta que pase por los puntos $P(3,1,0)$, $Q(0,-5,1)$ y $R(6,-5,1)$.
9. Escribe las ecuaciones paramétricas y las ecuaciones implícitas de los ejes de coordenadas.
10. Halla las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $A(-4,2,5)$ y es paralela al eje Z.
11. Escribe las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $P(1,-3,0)$ y es paralela al vector $\vec{u}\times\vec{v}$, siendo $\vec{u}(1,-1,2)$ y $\vec{v}(2,0,0)$.
12. Halla las ecuaciones paramétricas de las siguientes rectas: $r\equiv\begin{cases}2x-y+z-3=0\\x-y+z-2=0\end{cases}$, $s\equiv\begin{cases}x+2y-z-3=0\\3y+z-1=0\end{cases}$.
13. Halla el vector director de la recta $\begin{cases}x-y=0\\y+z=2\end{cases}$ y escribe sus ecuaciones paramétricas.
14. Expresa la siguiente recta como intersección de dos planos: $r\equiv\frac{x}{2}=\frac{y+1}{-1}=z$.
15. Estudia la posición relativa de las siguientes rectas y halla el punto de corte, cuando sea posible:
   a) $r\equiv\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{4}$, $s\equiv\frac{x+2}{-1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-2}{3}$
   b) $r\equiv\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{1}$, $s\equiv\frac{x-4}{4}=\frac{y-4}{1}=\frac{z-5}{2}$
   c) $r\equiv\frac{x}{2}=y-1=\frac{z+1}{3}$, $s\equiv\begin{cases}x-2y-1=0\\3y-z+1=0\end{cases}$
   d) $r\equiv\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}$, $s\equiv\begin{cases}x=3+4\lambda\\y=3+6\lambda\\z=4+8\lambda\end{cases}$
16. Obtén el valor de a para el cual las rectas $r\equiv x=y=z-a$ y $s\equiv\frac{2x-1}{3}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-2}{0}$ se cortan. Calcula el punto de corte de r y s para el valor de a que has calculado.

17. Halla los valores de m y n para que las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 5 + 4\lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$ y $s \equiv \frac{x}{m} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+3}{n}$ sean paralelas.

18. Halla la ecuación de la recta perpendicular al plano $x + 2y = 5$ y que pasa por el punto $P(7,-2,1)$.

19. Escribe la ecuación de la recta que pasa por $P(-1,5,0)$ y es paralela a $r \equiv \begin{cases} x + y = 1 \\ y - z = 2 \end{cases}$.

20. Halla la ecuación implícita de cada uno de los siguientes planos:

    a) Determinado por el punto $A(1,-3,2)$ y por los vectores $\vec{u}(2,1,0)$ y $\vec{v}(-1,0,3)$.

    b) Pasa por el punto $P(2,-3,1)$ y su vector normal es $\vec{n}(5,-3,-4)$.

    c) Perpendicular a la recta $r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{3}$ y que pasa por el punto $(1,0,1)$.

21. Halla las ecuaciones paramétricas e implícitas de los planos XY, YZ, XZ.

22. Escribe las ecuaciones paramétricas de los planos:

    a) $z = 3$; b) $x = -1$; c) $y = 2$

23. ¿Cuál es el vector normal del plano $x = -1$? Escribe las ecuaciones de una recta perpendicular a ese plano que pase por $A(2,3,0)$.

24. Calcula los valores de m y n para que los planos $\pi_1 \equiv mx + y - 3z - 1 = 0$ y $\pi_2 \equiv 2x + ny - z - 3 = 0$ sean paralelos. ¿Pueden ser π_1 y π_2 coincidentes?

25. Considera los puntos $A(0,1,-2)$, $B(1,2,0)$, $C(0,0,1)$ y $D(1,0,m)$. Calcula el valor de m para que los cuatro puntos sean coplanarios.

26. Halla la ecuación del plano perpendicular a la recta $r \equiv \begin{cases} x - 2y + 6 = 0 \\ 3x + 2y - 4 = 0 \end{cases}$ y que pasa por el punto $P(1,-4,2)$.

27. Comprueba que la recta $\frac{x}{2} = y - 3 = \frac{2-z}{3}$ corta al plano $x - 2y + z = 1$ y halla el punto de corte.

28. Determina las ecuaciones paramétricas del plano que contiene al punto $P(2,1,2)$ y a la recta $r \equiv x - 2 = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-4}{-3}$.

29. Considera las rectas siguientes: $r \equiv \frac{x-1}{2} = y = z - 2$, $s \equiv \begin{cases} x - 2z = 5 \\ x - 2y = 11 \end{cases}$

    a) Comprueba que r y s son paralelas.

    b) Halla la ecuación implícita del plano que contiene a r y a s.

30. ¿Son coplanarios los puntos $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(2,1,0)$ y $D(-1,2,1)$? En caso afirmativo, escribe la ecuación del plano que los contiene.

31. Estudia la posición relativa de los tres planos en cada uno de los siguientes casos.

    a) $\begin{cases} x + 2y - z - 3 = 0 \\ 3y + 2z - 1 = 0 \\ x + y + z - 2 = 0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0 \\ x - y + z - 2 = 0 \\ 3x - y + z - 4 = 0 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x - y + z - 1 = 0 \\ 3x + y - 2z = 0 \\ 2x + 2y - 3z + 4 = 0 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ -x + y + z + 1 = 0 \\ 2x - z + 2 = 0o \end{cases}$

32. Calcula la ecuación del plano que determinan el punto $A(1,0,1)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x+y-z+1=0 \\ 2x-y+2z=0 \end{cases}$.

33. Estudia la posición relativa de la recta $r \equiv \begin{cases} x=-t \\ y=0 \\ z=1+t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ y el plano $\pi \equiv 2x-y+3z=6$.

34. Estudia la posición relativa de la recta $r \equiv \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv z=1$.

35. Escribe la ecuación del plano que pasa por los puntos $A(1,-3,2)$ y $B(0,1,1)$, y es paralelo a la recta $r \equiv \begin{cases} 3x-2y+1=0 \\ 2y+3z-3=0 \end{cases}$.

36. Dados los planos $\pi \equiv mx+2y-3z-1=0$ y $\pi' \equiv 2x-4y+6z+5=0$ halla m para que sean:

a) Paralelos. ; b) Perpendiculares.

37. Halla la ecuación del plano que contiene a la recta $\begin{cases} x=1+t \\ y=-1+2t \\ z=t \end{cases}$, y es perpendicular al plano $2x+y-z-2=0$.

38. Halla la ecuación del plano que contiene a la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{2}=y=2-z$ y es paralelo a la recta $s \equiv \begin{cases} x-y-z=0 \\ x-2y+z=0 \end{cases}$.

39. Considera las rectas de ecuaciones $r \equiv x-1=y=1-z$, $s \equiv \begin{cases} x+2y=4 \\ x-z=2 \end{cases}$.

a) Halla su punto de corte.

b) Determina la ecuación del plano que contiene a r y a s.

40. Dado el plano $\pi \equiv x+z=4$ y el punto $P(1,1,0)$, se pide:

a) La ecuación del plano paralelo a π que contiene a P.

b) Las ecuaciones paramétricas de la recta r perpendicular a π que pasa por P.

¿Cuál es la posición relativa de la recta r y el plano hallado?

41. Calcula el valor de m para que los siguientes planos se corten dos a dos:

$\pi_1 \equiv x-3y-2z-2=0$, $\pi_2 \equiv -2x+y-z-3=0$, $\pi_3 \equiv 5x+5z=m$

42. Dados el plano $\pi \equiv 2x+ay+4z+25=0$ y la recta $x+1=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+3}{5}$, calcula los valores de a para que la recta esté contenida en el plano.

43. Encuentra la ecuación continua de la recta que pasa por el punto $P(1,1,1)$ y corta a las rectas $r \equiv \begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+2y+z=0 \end{cases}$, $s \equiv \dfrac{x}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+1}{1}$.

44. Calcula b para que las rectas $r \equiv \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+5}{-3}=\dfrac{z+1}{2}$ y $s \equiv \dfrac{x}{4}=\dfrac{y-b}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$ se corten. ¿Cuál es el punto de corte?.

45. Determina el valor de k para que las rectas r y s sean coplanarias. Halla, después, el plano que las contiene:

a) $r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-k}{1} = \frac{z}{0}$, $s \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 1-\lambda \\ z = -1+\lambda \end{cases}$; b) $r \equiv \frac{x-6}{3} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-3}{1}$, $s \equiv \begin{cases} x = 6+6\lambda \\ y = 4+k\lambda \\ z = 3+2\lambda \end{cases}$

46. Dadas la recta r, determinada por los puntos $A(1,1,1)$ y $B(3,1,2)$, y la recta $s \equiv \begin{cases} x-2z-1=0 \\ y-2=0 \end{cases}$, estudia su posición relativa y halla, si existe, la ecuación del plano que las contiene.

47. Halla la ecuación del plano que pasa por los puntos $A(1,3,2)$ y $B(-2,5,0)$ y es paralelo a la recta $\begin{cases} x = 3-\lambda \\ y = 2+\lambda \\ z = -2-3\lambda \end{cases}$

48. Si $A(2,1,-1)$, $B(1,0,1)$ y $C(0,1,-3)$ son tres vértices consecutivos de un paralelogramo:

a) Halla el cuarto vértice D.

b) Determina la recta que pasa por el centro del paralelogramo y es perpendicular al plano que lo contiene.

49. Dados los planos $\pi_1 \equiv x+y=1$, $\pi_2 \equiv my+z=0$, $\pi_3 \equiv x+(m+1)y+mz=m+1$:

a) ¿Cuánto debe valer m para que no tengan ningún punto en común?

b) Determina su posición relativa cuando $m=0$.

50. Calcula el valor de m para que los puntos $A(m,0,1)$, $B(0,1,2)$, $C(1,2,3)$ y $D(7,2,1)$ sean coplanarios. ¿Cuál es la ecuación de ese plano?

51. Considera el plano $\pi \equiv 2x-3y+z=0$ y la recta de ecuación $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{x+1}{2}$. Halla la ecuación del plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π.

52. Halla las ecuaciones de la recta determinada por la intersección de los planos $\pi_1 \equiv \begin{cases} x = 2-\mu \\ y = 3\lambda+\mu \\ z = 3-3\lambda \end{cases}$ y $\pi_2 \equiv x+y-z=3$.

53. Sean la recta $r \equiv \begin{cases} 3x-y+z=0 \\ 2x-z+3=0 \end{cases}$ y el plano de ecuación $ax-y+4z-2=0$.

a) Calcula el valor de a para que r sea paralela al plano.

b) ¿Existe algún valor de a para el cual r sea perpendicular al plano?

54. Dados la recta $r \equiv \begin{cases} x-2z+3=0 \\ y-z-4=0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv x+2y+3z-1=0$, halla la ecuación de una recta s contenida en el plano π que pase por el punto $P(2,1,-1)$ y sea perpendicular a r.

55. Estudia la posición relativa de la recta $r \equiv \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv z=1$. Halla, si existe, la ecuación de una recta perpendicular a r y que pase por el punto de intersección de r y π.

56. Dada la recta $r \equiv \begin{cases} 2x-y-5=0 \\ x+z-2=0 \end{cases}$, escribe la ecuación del plano π que contiene a r y pasa por el origen de coordenadas. Halla la ecuación de la recta perpendicular a π que pasa por el punto $P(1,1,1)$.

57. Escribe la ecuación del plano que pasa por los puntos $A(1,-3,2)$ y $B(0,1,1)$ y es paralelo a la recta $r \equiv \begin{cases} 3x-2y+1=0 \\ 2y+3z-3=0 \end{cases}$.

58. Sean A y B los puntos de coordenadas $A(3,4,1+2a)$ y $B(-3,a,0)$. Calcula las ecuaciones paramétricas de la reta que pasa por A y B. ¿Existe algún valor de a para el cual dicha recta contenga al punto $R(9,4,6)$?

59. Considera el punto $P(1,0,0)$ y las rectas $r \equiv x-3=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+1}{-2}$ y $s \equiv (x,y,z)=(1,1,0)+\lambda(-1,2,0)$.

a) Estudia la posición relativa de r y s.

b) Halla la ecuación del plano que pasa por P y es paralelo a r y a s.

60. Comprueba que las rectas $r \equiv x+1=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+3}{5}$ y $s \equiv \begin{cases} x=t \\ y=1+t \\ z=2-t \end{cases}$ no se cortan ni son paralelas. Halla la ecuación del plano α que contiene a r y es paralelo a s, y la del plano β que contiene a s y es paralelo a r. ¿Cómo son entre sí los planos α y β ?

61. Considera el plano $\pi \equiv x-z=0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x=1+at \\ y=1-t \\ z=2t \end{cases}$.

a) Determina el valor de a para que la recta r y el plano π sean paralelos.

b) Para ese valor de a, determina las ecuaciones paramétricas de una recta r' paralela al plano π y que corte perpendicularmente a r en el punto $P(1,1,0)$.

62. Considera las rectas $r \equiv mx=y-1=z+3$ y $s \equiv \dfrac{x+1}{2}=y-2=\dfrac{z}{-3}$.

a) Halla el valor del parámetro m para que r y s sean perpendiculares.

b) Justifica si existe algún valor de m para el cual r y s sean paralelas.

63. Dado el punto $P(1,-2,1)$, el plano $\pi \equiv 2x-4y+z=15$ y la recta $r \equiv \dfrac{x}{-2}=y+1=\dfrac{z-2}{-1}$:

a) Halla la ecuación del plano que pasa por P y contiene a r.

b) Halla las ecuaciones de la recta r que pasa por P, es paralela a π y corta a r.

64. Dados los vectores $\vec{u}(2,3,5)$, $\vec{v}(6,-3,2)$, $\vec{w}(4,-6,3)$, $\vec{p}(8,0,a)$ y los planos

$\pi \equiv (x,y,z)=(1,2,3)+\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}$; $\pi' \equiv (x,y,z)=(1,2,3)+\lambda\vec{w}+\mu\vec{p}$

estudia la posición relativa de π y π' según los valores de a.

65. Halla las ecuaciones de la recta r que pasa por el punto $P(2,0,-1)$ y corta a las rectas $s_1 \equiv \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+1}{1}$ y $s_2 \equiv \begin{cases} x+y+4=0 \\ y-3z+3=0 \end{cases}$.

66. Estudia las posiciones relativas del plano $\pi \equiv x+ay-z=1$ y la recta $r \equiv \begin{cases} 2x+y-az=2 \\ x-y-z=a-1 \end{cases}$, según los valores de a.

67. Dados los planos $\pi \equiv ax+y+z=a$ y $\pi' \equiv x-ay+az=-1$, comprueba que se cortan en una recta para cualquier valor del parámetro a. Obtén el vector dirección de esa recta en función de dicho parámetro.

68. Considera las rectas siguientes: $r \equiv \begin{cases} x-3y+6=0 \\ ax-3z+3=0 \end{cases}$, $s \equiv \begin{cases} x-2ay=1-4a \\ 2y-z-4=0 \end{cases}$.

a) Averigua si existe algún valor de a para el cual las rectas están contenidas en un plano. En caso afirmativo, calcula la ecuación de dicho plano.

b) ¿Existe algún valor de a para el que las rectas son paralelas? ¿Para qué valores de a se cruzan?

69. Halla la ecuación de la recta que pasa por $A(1,1,1)$, es paralela a $\pi \equiv x-y+z-3=0$ y corta a $s \equiv \begin{cases} x=1 \\ z=3 \end{cases}$.

70. ¿Verdadero o falso? Justifica las respuestas.

a) El plano $x+14y+11z+12=0$ es paralelo a la recta $\frac{x-3}{5}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{-3}$.

b) El plano del apartado anterior contiene a la recta $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{-1}=z-1$.

c) El vector director de una recta determinada por dos planos secantes es paralelo a los vectores normales de ambos planos.

d) Si las rectas r y s se cruzan, existe una recta que pasa por un punto dado y corta a r y a s.

e) Si el vector director de una recta no es perpendicular al vector normal de un plano, la recta y el plano se cortan.

f) Si los planos α y β son paralelos y π es un plano que los corta, entonces el sistema de ecuaciones que forman los tres planos es compatible determinado.

g) La recta $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2+t \\ z=0 \end{cases}$ está contenida en el plano de ecuación $2x-y+mz=3$ cualquiera que sea el valor de m.

71. Explica cómo se obtienen las ecuaciones paramétricas de un plano del que se conoce la ecuación implícita. Aplícalo al plano $\pi \equiv x+2y-z-1=0$. ¿Cómo se hace si en la ecuación no aparece una de las incógnitas? Aplícalo al plano $\pi' \equiv 2x-z+8=0$.

72. ¿Qué posición relativa deben tener dos rectas para que determinen un plano?

73. ¿Qué condición deben cumplir tres puntos para que determinen un plano? Justifica que hay infinitos planos que contengan a los puntos $A(1,2,3)$, $B(2,3,4)$ y $C(5,6,7)$.

74. Indica qué condición deben cumplir a, b, c y d para que el plano $\pi \equiv ax+by+cz+d=0$ sea:

a) Paralelo al plano XY.

b) Perpendicular al plano XY.

c) Paralelo al eje Z.

d) Perpendicular al eje X.

e) No sea paralelo a ninguno de los ejes.

75. Demuestra que la ecuación del plano que corta a los ejes en $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$ y $C(0,0,c)$, siendo a, b y c no nulos, puede escribirse de la forma $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$. Calcula los puntos de corte del plano $\frac{x}{5}+\frac{y}{2}+\frac{z}{7}=1$ con los ejes de coordenadas.

76. Considera el plano $\pi \equiv ax+y+z+1=0$ y las rectas $r_1 \equiv \begin{cases} x=1 \\ y=z \end{cases}$, $r_2 \equiv \begin{cases} x=2 \\ y=2z \end{cases}$, $r_3 \equiv \begin{cases} x=3 \\ y=3z \end{cases}$. Calcula el valor de a para que los puntos de corte del plano con cada una de las rectas estén alineados.