Método de Gauss

1. Resuelve, si es posible, los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x+2y+z=9 \\ x-y-z=-10 \\ 2x-y+z=5 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x+2y+z=3 \\ 2x-y+z=-1 \end{cases}$; c) $\begin{cases} -x+2y-z=1 \\ 2x-4y+2z=3 \\ x+y+z=2 \end{cases}$; d) $\begin{cases} 2x-3y+z=0 \\ 3x-y=0 \\ 4x+y-z=0 \end{cases}$

2. Estudia y resuelve por el método de Gauss:

a) $\begin{cases} -x+y+3z=-2 \\ 4x+2y-z=5 \\ 2x+4y-7z=1 \end{cases}$; b) $\begin{cases} y+z=-1 \\ x-y=1 \\ x+2y+3z=-2 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 5x+2y+3z=4 \\ 2x+2y+z=3 \\ x-2y+2z=-3 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x-y+3z-14t=0 \\ 2x-2y+3z+t=0 \\ 3x-3y+5z+6t=0 \end{cases}$

3. Resuelve por el método de Gauss:

a) $\begin{cases} x+2z=11 \\ x+y=3 \\ y+z=13 \\ x+y+z=10 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x+y+z+t=1 \\ x-y+z-t=0 \\ x+y-z-t=-1 \\ x+y+z-t=2 \end{cases}$

4. Discute los siguientes sistemas según los valores del parámetro m:

a) $\begin{cases} x+2y=3 \\ y=1 \\ 2y=m-2 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x-2y+z=3 \\ y+2z=0 \\ 3y+7z=m \end{cases}$; c) $\begin{cases} x+y-z=1 \\ -2y+8z=3 \\ mz=1 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x-y=0 \\ 3x+z=0 \\ (m-5)z=0 \end{cases}$

5. Discute los siguientes sistemas y resuélvelos cuando sea posible:

a) $\begin{cases} 2x-y=4 \\ -x+(y/2)=-2 \\ x+my=2 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ x-2y+z=3 \\ 5x-5y+2z=m \end{cases}$; c) $\begin{cases} x+2y=3 \\ 2x-y=1 \\ 4x+3y=m \end{cases}$; d) $\begin{cases} x-y-2z=2 \\ 2x+y+3z=1 \\ 3x+z=3 \\ x+2y+5z=m \end{cases}$

Teorema de Rouché. Regla de Cramer

6. Aplica el teorema de Rouché para averiguar si los siguientes sistemas son compatibles o incompatibles:

a) $\begin{cases} x-y=6 \\ 4x+y=-1 \\ 5x+2y=-5 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x+y-z=-2 \\ 2x-y-3z=-3 \\ x-2y-2z=0 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 2x+3y-z=3 \\ -x-5y+z=0 \\ 3x+y-z=6 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x-y-2z=2 \\ 2x+y+3z=1 \\ 3x+z=5 \end{cases}$;

e) $\begin{cases} x+y+z=2 \\ x-2y-7z=0 \\ y+z=-1 \\ 2x+3y=0 \end{cases}$; f) $\begin{cases} x+3y+z=-1 \\ x-y-z=-1 \\ 2x+y+3z=5 \end{cases}$

7. Resuelve los siguientes sistemas aplicando la regla de Cramer:

a) $\begin{cases} 8x+14y=2 \\ 3x-5y=11 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x+y-z+t=1 \\ x-y-t=2 \\ z-t=0 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 3x-y=2 \\ 2x+y+z=0 \\ 3y+2z=-1 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x-y-z+t=4 \\ x+y+z-t=2 \end{cases}$

8. Estudia y resuelve estos sistemas, cuando sea posible:

a) $\begin{cases} 3x+y-z=0 \\ x+y+z=0 \\ y-z=1 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x-2y+z=-2 \\ -2x+y+z=-2 \\ x+y-2z=-2 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x+2y+z=0 \\ -x-y=1 \\ -y-z=-1 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x+y=5 \\ x+z=6 \\ y+z=7 \\ 2x+y+z=11 \end{cases}$

9. Resuelve los siguientes sistemas homogéneos:

a) $\begin{cases} x+y-z=0 \\ 12x-3y-2z=0 \\ x-2y+z=0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 9x+3y+2z=0 \\ 3x-y+z=0 \\ 8x+y+4z=0 \\ x+2y-2z=0 \end{cases}$

Discusión de sistemas mediante determinantes

10. ¿Existe algún valor de a para el cual estos sistemas tengan infinitas soluciones?

a) $\begin{cases} 3x-2y-3z=2 \\ 2x+ay-5z=-4 \\ x+y+2z=2 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x+y+z=a-1 \\ 2x+y+az=a \\ x+ay+z=1 \end{cases}$

11. Discute los siguientes sistemas homogéneos en función del parámetro a:

a) $\begin{cases} 2x-y+z=0 \\ x+2y-3z=0 \\ 3x-4y-az=0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ ax+2z=0 \\ 2x-y+az=0 \end{cases}$; c) $\begin{cases} ax+y-z=0 \\ x+2y+z=0 \\ 3x+10y+4z=0 \end{cases}$; d) $\begin{cases} 3x+3y-z=0 \\ 4x+2y-az=0 \\ 3x+4y+6z=0 \end{cases}$

12. Discute los siguientes sistemas según los valores del parámetro m:

a) $\begin{cases} mx+y+z=4 \\ x+y+z=m \\ x-y+mz=2 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x+y+z=m-1 \\ 2x+y+mz=m \\ x+my+z=1 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ x+my+z=0 \\ 2x+3y+4z=2 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x+my+z=4 \\ x+3y+z=5 \\ mx+y+z=4 \end{cases}$;

e) $\begin{cases} x+2z=3 \\ 3x+y+z=-1 \\ 2y-z=-2 \\ x-y+mz=-5 \end{cases}$; f) $\begin{cases} -2x+y+z=1 \\ x-2y+z=m \\ x+y-2z=0 \\ x-y-z=m \end{cases}$

13. Estudia los siguientes sistemas de ecuaciones. Resuélvelos cuando sean compatibles e interpreta geométricamente las soluciones obtenidas.

a) $\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ x-2y+z=3 \\ 5x-5y+2z=m \end{cases}$; b) $\begin{cases} x+ay-z=1+a \\ x+y-az=a \\ x-y-z=a \end{cases}$; c) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ mx+y+(m-1)z=2 \\ x+my+z=m \end{cases}$; d) $\begin{cases} x+z=1 \\ y+(a-1)z=0 \\ x+(a-1)y+az=a \end{cases}$

Forma matricial de un sistema

14. Expresa en forma matricial y resuelve utilizando la matriz inversa:

a) $\begin{cases} 2x+y=2 \\ y+3z=0 \\ 2x+y+z=2 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x+y-z=3 \\ 2x+y+z=-2 \\ x-2y-3z=1 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x+y=-1 \\ y+z=-2 \\ x+z=3 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x+2y+z=3 \\ 3y+z=4 \\ x+2y+2z=4 \end{cases}$

15. Escribe en la forma habitual estos sistemas y resuélvelos si es posible:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

16. Escribe las ecuaciones lineales del sistema $AX=B$, siendo $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 11 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$, y resuélvelo.

17. Resuelve el siguiente sistema: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Problemas

18. Una panadería utiliza tres ingredientes A, B y C para elaborar tres tipos de tarta. La tarta T_1 se hace con 1 unidad de A, 2 de B y 2 de C. La tarta T_2 lleva 4 unidades de A, 1 de B y 1 de C. Y la T_3 necesita 2 unidades de A, 1 de B y 2 de C. Los precios de venta al público son $7,50$ € la T_1; $6,50$ € la T_2 y 7 € la T_3. Sabiendo que el beneficio que se obtiene con la venta de cada tarta es de 2 €, calcula cuánto le cuesta a la panadería cada unidad A, B y C.

19. Halla un número de tres cifras tal que la suma de las centenas y las unidades con el doble de las decenas es 23; la diferencia entre el doble de las centenas y la suma de las decenas más las unidades es 9 y la media de las centenas y decenas más el doble de las unidades es 15. ¿Es posible encontrar un número de tres cifras si cambiamos la tercera condición por "el triple de las centenas más las decenas es 25"?

20. Un automóvil sube las cuestas a 54 km/h, las baja a 90 km/h y en llano marcha a 80 km/h. Para ir de A a B tarda 2 horas y 30 minutos, y para volver de B a A, 2 horas y 45 minutos. ¿Cuál es la longitud de camino llano entre A y B si sabemos que la distancia entre A y B es de 192 km?

21. Una persona ha obtenido 6000 € de beneficio por invertir un total de 60000 € en tres empresas A, B y C. La suma del dinero invertido en A y B fue m veces el invertido en C, y los beneficios fueron el 5% en A, el 10% en B y el 20% en C.
    a) Plantea un sistema de ecuaciones para averiguar la cantidad invertida en cada empresa.
    b) Prueba que si $m>0$, el sistema es compatible determinado.
    c) Halla la solución para $m=5$.

22. Tres comerciantes invierten en la compra de ordenadores de los modelos A, B y C de la siguiente forma. El primero invierte 50000 € en los de tipo A, 25000 € en los de tipo B y 25000 € en los de tipo C. El segundo dedica 12500 € a los de tipo A, 25000 € a los de tipo B y 12500 € a los de tipo C. Y el tercero 10000 €, 10000 € y 20000 €, respectivamente, en los modelos A, B y C. Después de venderlos todos, la rentabilidad que obtiene el primero es el 15%, el segundo el 12% y el tercero el 10%. Determina la rentabilidad de cada uno de los modelos vendidos.

23. Un cajero automático contiene 95 billetes de 10, 20 y m euros. Se sabe que tiene almacenados 2000 € y que el número de billetes de 10 euros es el doble que el número de billetes de 20 euros.
    a) Plantea un sistema de ecuaciones que refleje las condiciones del problema. Prueba que si $m\in\{5,\ 50,\ 100\}$ el sistema es compatible determinado.
    b) ¿Puede haber billetes de 5 o 100 euros en el cajero?
    c) Resuelve el sistema para $m=50$.

Ejercicios variados y para profundizar

24. Discute y resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} \lambda x+2z=0 \\ \lambda y-z=\lambda \\ x+3y+z=5 \end{cases}$; b) $\begin{cases} (m+2)x+(m-1)y-z=3 \\ mx-y+z=2 \\ x+my-z=1 \end{cases}$; c) $\begin{cases} \lambda x+3y+z=\lambda \\ x+\lambda y+\lambda z=1 \\ x+y-z=1 \end{cases}$; d) $\begin{cases} mx+y+z=2 \\ 2x+my+m^2z=1 \\ 2x+y+z=2 \end{cases}$

25. Discute los siguientes sistemas en función del parámetro y resuélvelos cuando sean compatibles:

a) $\begin{cases} ax+y=0 \\ -y+2az=0 \\ -x+ay=0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} mx+y+z=0 \\ x-my-z=1 \\ 2x+y+z=2 \end{cases}$; c) $\begin{cases} kx+ky-z=2 \\ 3x-ky=0 \\ 5x+ky=0 \\ x+2z=1 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x+3y+z=5 \\ mx+2z=0 \\ my-z=m \\ x-y+z=0 \end{cases}$

26. Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} m-1 & 1 & 0 \\ m-1 & m+2 & 2 \\ m-1 & m+2 & m+1 \end{pmatrix}$

a) Determina para qué valores de m la matriz es singular (una matriz es singular cuando no tiene inversa).

b) Resuelve, si es posible, el siguiente sistema para $m=1$ y $m=-1$: $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}$.

27. Demuestra que el siguiente sistema de ecuaciones tiene siempre solución para cualquier valor de α y β: $\begin{cases} x-y+(\alpha+\beta)z=\alpha \\ x+z=\beta \\ x-z=\alpha-3\beta \end{cases}$. ¿Es posible que tenga infinitas soluciones para algún valor de α y β?

28. Estudia y resuelve cuando sea posible.

a) $\begin{cases} x+y+2t=3 \\ 3x-y+z-t=1 \\ 5x-3y+2z-4t=a \\ 2x+y+z+t=2 \end{cases}$; b) $\begin{cases} ax+z+t=1 \\ ay+z-t=1 \\ ay+z-2t=2 \\ az-t=0 \end{cases}$

29. Discute los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x-y+z=2 \\ 2x+3y-2z=-8 \\ 4x+y+az=b \end{cases}$; b) $\begin{cases} x+y+z=a-1 \\ 2x+y+az=a \\ x+ay+z=b \end{cases}$; c) $\begin{cases} x-3y+z=a \\ x-z=b \\ x+z=c \end{cases}$; d) $\begin{cases} ax+y-z=b-1 \\ 2x+ay=b+1 \\ -x+z=b \end{cases}$

30. Dado este sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x-1=3\alpha-\beta \\ y+2=2\alpha+\beta \\ z=\alpha+2\beta \end{cases}$, donde $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, transfórmalo en un sistema equivalente que no dependa de los parámetros α, β; es decir, transfórmalo en un sistema en el que sus ecuaciones se expresen solo en función de las incógnitas.