

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} = 0 ; \text{ b) } \begin{vmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a+6 & 3 \\ a-1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 ; \text{ c) } \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & a^2 \end{vmatrix} = 0 ; \text{ d) } \begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & a & 2 \end{vmatrix} = 0$$

2. Halla el valor de los siguientes determinantes de orden 4:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 6 & 0 & 1 \end{vmatrix} ; \text{ b) } \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

3. Calcula el valor de los siguientes determinantes:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} ; \text{ b) } \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 0 \end{vmatrix} ; \text{ c) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} ; \text{ d) } \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 10 & 4 \\ 7 & -8 & 9 & -2 \end{vmatrix}$$

4. Si $\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -5$, ¿cuál es el valor de cada uno de los siguientes determinantes? Justifica las respuestas.

$$\text{a) } \begin{vmatrix} m+3n & p+3q \\ n & q \end{vmatrix} ; \text{ b) } \begin{vmatrix} p & m \\ q & n \end{vmatrix} ; \text{ c) } \begin{vmatrix} 3n & -m \\ 3q & -p \end{vmatrix} ; \text{ d) } \begin{vmatrix} p & 2m \\ q & 2n \end{vmatrix} ; \text{ e) } \begin{vmatrix} 1 & m/n \\ mp & mq \end{vmatrix} ; \text{ f) } \begin{vmatrix} m & 5m \\ p & 5p \end{vmatrix}$$

5. Sustituye los puntos suspensivos por los números adecuados para que se verifiquen las siguientes igualdades:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dots & 7 \\ \dots & -3 \end{vmatrix} ; \text{ b) } \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dots & \dots \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$$

6. Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 5$, calcula el valor de los siguientes determinantes:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+7 & b+7 & c+7 \\ x/2 & y/2 & z/2 \end{vmatrix} ; \text{ b) } \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ c-a & b-c & c \\ z-x & y-z & z \end{vmatrix} ; \text{ c) } \begin{vmatrix} 1-x & 1-y & 1-z \\ a+2x & b+2y & c+2z \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix}$$

7. Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 3$ y utilizando las propiedades de los determinantes, calcula:

$$\text{a) El determinante de la matriz } \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 6 & 0 & 3 \\ a & b & c \end{pmatrix}^4 ; \text{ b) } \begin{vmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3a & 3b & 3c \end{vmatrix} ; \text{ c) } \begin{vmatrix} 3a+2 & 3b+4 & 3c+6 \\ 2a & 2b & 2c \\ a+6 & b & c+3 \end{vmatrix}$$

8. Resuelve la ecuación $|A| = 0$ siendo $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 2a \\ 0 & a-1 & 0 \\ -a & 0 & -a \end{pmatrix}$. Para $a = 3$, obtén el determinante de la matriz $2A$.

9. Halla el rango de las siguientes matrices:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 6 & 10 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}; \text{ b) } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & 6 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}; \text{ c) } C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \text{ d) } D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 7 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

10. Estudia el rango de las siguientes matrices según el valor del parámetro que aparece en ellas:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & a \end{pmatrix}; \text{ b) } B = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ -1 & 2a & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}; \text{ c) } C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & a \\ a & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}; \text{ d) } D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

11. Halla los valores del parámetro m para los que el rango de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & m^2 \\ m & m & m^2 \end{pmatrix}$ es menor que 3.

12. Estudia el rango de estas matrices según el valor del parámetro a :

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \\ a & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}; \text{ b) } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}; \text{ c) } C = \begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ 1 & -a & 2a-1 \end{pmatrix}; \text{ d) } D = \begin{pmatrix} a-2 & 1-2a & -1 \\ a & a & 2a \end{pmatrix}$$

13. Estudia el rango de la matriz M según los valores de t :

$$\text{a) } M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & t & 3 & 2 \\ 1 & 8-3t & 3 & -2 \end{pmatrix}; \text{ b) } M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & t & 4 & 0 \\ -1 & 3 & t & -2 \end{pmatrix}; \text{ c) } M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & t+1 & 1 \\ t & 0 & 0 & 2 \\ 0 & t & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

14. Estudia el rango de las siguientes matrices según los valores del parámetro a :

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} a & 1 & 3 & 0 \\ 1 & a & 2 & 1 \\ 2 & 2a & 5 & a \end{pmatrix}; \text{ b) } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ a & 1 & 2 & a+1 \\ 1 & 1+a & 0 & 1 \end{pmatrix}; \text{ c) } C = \begin{pmatrix} a+1 & 1 & 1 & -1 \\ -a-1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & a^2-a-1 & -a+2 \end{pmatrix};$$

$$\text{d) } D = \begin{pmatrix} 1 & a & a-2 & 1 \\ 1 & 2a & a-4 & 3 \\ a & a^2 & 2a^2-2a-4 & 2a+2 \end{pmatrix}$$

15. Halla la matriz inversa de las siguientes matrices:

$$\text{a) } M = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}; \text{ b) } N = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

16. Calcula la inversa de cada una de las siguientes matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Resuelve las

ecuaciones $AX = B$ y $XB = A$ siendo A y B las matrices anteriores.

17. Calcula la inversa de esta matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

18. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & x & 3 \\ 4 & 1 & -x \end{pmatrix}$, halla:

- a) Los valores de x para los que la matriz A posee inversa.
- b) La inversa de A para $x = 2$.
- c) El valor de $b \in \mathbb{R}$ para que la matriz bA tenga determinante 1.

19. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$:

- a) Calcula $A(2I - A)$, donde I es la matriz identidad de orden 3.
- b) Justifica si existen las matrices inversas de A y $2I - A$.
- c) ¿Para qué valor de k se verifica $A^{-1} = kI - A$?

20. Halla los valores del parámetro t para los cuales las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & t & 4 \\ -1 & 3 & t \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 1 & 1 & 0 \\ t & 0 & 1 \end{pmatrix}$ no son

regulares y calcula A^{-1} si $t = 1$, y B^{-1} si $t = 2$.

21. Dada $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, halla X tal que $AXA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

22. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, encuentra la matriz X tal que $AXB = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

23. Resuelve la ecuación $AXB = C$ siendo: $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

24. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \end{pmatrix}$, halla la matriz X que verifica $(AB' + C)X = D$.

25. Halla X tal que $3AX = B$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

26. Dadas las siguientes matrices: $A = \begin{pmatrix} m & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

- a) ¿Para qué valores de m existe A^{-1} ?
- b) Para $m = 1$, halla la matriz X tal que $XA + B = C$.

27. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & k & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & k \\ 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Determina para qué valores de k la matriz AB tiene

inversa. Resuelve la ecuación $ABX = 3I$ para $k = 0$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

28. Resuelve las ecuaciones siguientes:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ 1 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} ; \text{ b) } \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & x & c \\ a & b & x \end{vmatrix} = 0 ; \text{ c) } \begin{vmatrix} -x & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -x & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -x \end{vmatrix} = 0 ; \text{ d) } \begin{vmatrix} x & -1 & -1 & 0 \\ -x & x & -1 & 1 \\ 1 & -1 & x & 1 \\ 1 & -1 & 0 & x \end{vmatrix} = 0$$

29. Estudia el rango de las siguientes matrices según los valores del parámetro que contienen:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} k & k & -1 & 2 \\ 3 & -k & 0 & 0 \\ 5 & k & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} ; \text{ b) } B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ k & k & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} ; \text{ c) } C = \begin{pmatrix} k & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{pmatrix} ;$$

$$\text{d) } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a & -1 \\ 1 & a+3 & 4-a & 0 \\ 1 & a+3 & a^2+2 & a+2 \end{pmatrix}$$

30. Calcula el rango de estas matrices en función del parámetro t :

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 & 2 \\ 2 & t & t^2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} ; \text{ b) } B = \begin{pmatrix} t & t & 0 \\ 2 & t+1 & t-1 \\ 2t+1 & 0 & -t-3 \end{pmatrix} ; \text{ c) } C = \begin{pmatrix} 3-t & 3 & 2t \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2+t \\ t+2 & 0 & t \end{pmatrix}$$

31. Comprueba aplicando las propiedades de los determinantes:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3 ; \text{ b) } \begin{vmatrix} 1 & a^2-1 & a \\ 1 & 2a^2-2 & 2a-1 \\ 1 & 0 & a^2 \end{vmatrix} = (a-1)^2$$

32. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -x & 1 & 1 \\ 1 & -x & 1 \\ 1 & 1 & -x \end{pmatrix}$, resuelve la ecuación $|A|=0$ y calcula el rango de la matriz A según los valores de x .

33. Dada la matriz de orden n , $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 9 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 9 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 9 \end{pmatrix}$, calcula el determinante de A_2 , A_3 y A_5 .

34. Estudia para qué valores de a tiene inversa la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$. Halla la inversa de A siempre que sea posible.

35. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, encuentra la expresión general de A^n donde n es un número natural cualquiera. Razona que A^n tiene inversa para cualquier $n \geq 1$ y calcula dicha matriz inversa.

36. Halla, en función de a , el valor de estos determinantes:

$$a) \begin{vmatrix} a+1 & a & a & a \\ a & a+1 & a & a \\ a & a & a+1 & a \\ a & a & a & a+1 \end{vmatrix} ; b) \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 2 & a & a & a \\ 3 & 2 & a & a \\ 4 & 3 & 2 & a \end{vmatrix}$$

37. Prueba, sin desarrollarlos, que el valor de los siguientes determinantes es 0 :

$$a) \begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x & x+3 & x+4 \\ x & x+5 & x+6 \end{vmatrix} ; b) \begin{vmatrix} yz & xz & xy \\ 1 & 1 & 1 \\ 1/x & 1/y & 1/z \end{vmatrix}$$

38. Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2a & -b & 3c \\ 3a & 0 & 4c \end{pmatrix}$, donde a , b y c son no nulos.

- a) Determina el número de columnas de A que son linealmente independientes.
b) Calcula el rango de A .

39. Estudia el rango de la siguiente matriz para los distintos valores de a , b y c : $M = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{pmatrix}$.

40. Estudia el rango de esta matriz: $A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

41. Indica, razonando la respuesta, cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) Si c_1 , c_2 y c_3 son las columnas 1ª, 2ª y 3ª de una matriz cuadrada de orden 3 tal que $|c_1 \ c_2 \ c_3| = 5$, entonces:

I) $|c_2 \ 2c_3 \ c_1| = 10$, II) $|c_1 + c_2 \ c_2 - c_1 \ c_3| = 0$,

III) $|c_1 + c_3 \ c_2 \ c_3 + c_1| = 5$, IV) $|-c_2 \ 2c_1 - c_3 \ c_3 + c_2| = 5$

b) Si B es una matriz cuadrada de orden 3 cuyo determinante vale 4, entonces:

I) $|5B| = 20$, II) $|B^2| = 16$; III) $|B^{-1}| = 1/4$

c) La matriz inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$ es $A^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} a & -a^2 + 1 & -1 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}{a}$, $a \neq 0$.

d) Si A es una matriz cuadrada tal que $A^2 = 2A - I$, entonces A es invertible y $A^{-1} = 2I - A$.

e) Si A y B son dos matrices regulares que verifican que $AXB = A + B$, entonces $X = A^{-1} + B^{-1}$.

42. Sea A una matriz cuadrada tal que $A^2 = A$. Demuestra que $|A| = 0$ o $|A| = 1$.