1. Efectúa, si es posible, las siguientes operaciones: AB, BD, $3B-2C$, BC, DD^t, siendo:

$$A=\begin{pmatrix}2&-1\\0&3\\1&0\end{pmatrix}\ ;\ B=\begin{pmatrix}2&-4&1&1\\2&0&-2&-1\end{pmatrix}\ ;\ C=\begin{pmatrix}0&-1&1&2\\3&1&-2&0\end{pmatrix}\ :\ D=\begin{pmatrix}5\\-3\\1\\2\end{pmatrix}$$

2. Dadas las siguientes matrices: $A=\begin{pmatrix}2&-1\\3&2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}0&1\\4&-2\end{pmatrix}$, calcula:

   a) AB ; b) BA ; c) B^{-1} ; d) $(A+B)(A-B)$; e) A^2-B^2 ; f) $(A+B)^2$; g) A^2+B^2+2AB

3. Dada la matriz cuadrada $A=\begin{pmatrix}3&0&8\\3&-1&6\\-2&0&-5\end{pmatrix}$, comprueba que $(A+I)^2=O$ y expresa A^2 como combinación lineal de A e I, donde O e I son, respectivamente, las matrices nula e identidad de orden 3.

4. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1&-1\\0&2\end{pmatrix}$, averigua cuál de las dos siguientes matrices es su inversa: $M=\begin{pmatrix}3/2&3/2\\1/2&1/2\end{pmatrix}$, $N=\begin{pmatrix}1&1/2\\0&1/2\end{pmatrix}$.

5. Halla las matrices inversas de $A=\begin{pmatrix}1&2\\-1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&0\\2&4\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$.

6. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}0&2&-1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$, prueba que A^3 es la matriz nula. Demuestra después que la matriz $I+A+A^2$ es la matriz inversa de $I-A$ (I es la matriz identidad de orden 3).

7. Comprueba que $A^2=2A-I$, siendo $A=\begin{pmatrix}5&-4&2\\2&-1&1\\-4&4&-1\end{pmatrix}$ e I la matriz cuadrada de orden 3. Utiliza la igualdad anterior para calcular A^4.

8. Dada la siguiente matriz: $A=\begin{pmatrix}0&3&4\\1&-4&-5\\-1&3&4\end{pmatrix}$, prueba que se verifica $A^3+I=O$ y utiliza esta igualdad para obtener A^{10}. Recuerda que O e I son, respectivamente, las matrices nula e identidad de orden 3.

9. Estudia el rango de las matrices siguientes: $A=\begin{pmatrix}1&-2&3&4\\-2&4&-6&8\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&3&0\\-1&0&0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&-2&3\\-2&4&-6\\12&-24&36\end{pmatrix}$,

$$D=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&0\\3&6&0\end{pmatrix},\ E=\begin{pmatrix}1&0&3&0\\0&2&0&3\\0&1&0&1\end{pmatrix},\ F=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

10. Estudia el rango de estas matrices y di, en cada caso, el número de columnas que son linealmente independientes:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&2\\2&3&5&11\\1&-1&6&29\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2&1&3\\4&2&-1\\6&3&2\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1&-3&-1&-1\\1&5&3&3\\1&1&1&1\\3&7&5&5\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&-1&1&-1\\1&1&-1&-1\\1&1&1&-1\end{pmatrix}.$$

11. Estudia el rango de las siguientes matrices según los valores del parámetro m:

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&2\\2&1&-1\\2&1&m\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-4&-m\\4&10&m^2\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}m&m+1\\2m&m-1\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&m&0\\2&0&m^2-1\end{pmatrix},$$

$$E=\begin{pmatrix}2&1&-1\\1&m&-m\end{pmatrix},\ F=\begin{pmatrix}m-2&0&0\\0&m&-1\\0&-1&m\end{pmatrix}.$$

12. Calcula X tal que $X-B^2=AB$, siendo $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

13. Resuelve el siguiente sistema dado en forma matricial: $\begin{pmatrix}1&-1\\3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&x\\y&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$.

14. Halla dos matrices A y B tales que: $2A+3B=\begin{pmatrix}8&4&7\\18&11&-6\\8&3&13\end{pmatrix}$ y $-A+5B=\begin{pmatrix}9&-2&16\\17&1&-10\\9&5&13\end{pmatrix}$.

15. Dadas las matrices $M=\begin{pmatrix}1&5\\-1&3\end{pmatrix}$ y $N=\begin{pmatrix}1&0\\3&0\end{pmatrix}$, halla dos matrices X e Y que verifiquen estas condiciones: $\begin{cases}X-2M=3N\\M+N-Y=I\end{cases}$, donde se supone que I es la matriz identidad de orden 2.

16. Calcula una matriz X que conmute con la matriz A, esto es, $AX=XA$, siendo $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$.

17. Considera las siguientes matrices: $A=\begin{pmatrix}2&-1&0\\0&2&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&1\\2&2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&-2\\0&2\\-2&0\end{pmatrix}$.

a) Calcula B^{-1}.

b) Halla X tal que $BX-A=C^t$.

c) Determina el orden o dimensión de una matriz M para poder calcular AMC.

d) ¿Cuál debe ser el orden o dimensión de N para que C^tN sea una matriz cuadrada?

18. Sea la siguiente ecuación matricial: $AX-B+C=O$, donde $A=\begin{pmatrix}4&1\\-1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&2&0&-1\\-2&-1&1&0\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}0&-1&2&1\\1&0&-3&0\end{pmatrix}$. Calcula A^{-1} aplicando la definición y resuelve la ecuación anterior.

19. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}$, calcula A^{-1} y halla la matriz X que verifique $AX+2A=I$.

20. Sean $A=\begin{pmatrix}3&1\\2&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&2\\1&1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}3&-1\\1&2\end{pmatrix}$. Despeja y calcula la matriz X en la ecuación $XA-B=XC$

21. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}2&-3\\-3&5\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1&-4\\-9&5\end{pmatrix}$:

    a) Calcula las matrices X e Y que verifiquen $2X-Y=A$ y $X-3Y=B$.

    b) Halla la matriz Z tal que $B+ZA-B^t=3I$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

22. Sea la matriz $A=\begin{pmatrix}x&-1\\1&y\end{pmatrix}$. Calcula A^2 y determina x e y para que $A^2=\begin{pmatrix}x+1&-2\\2&-1\end{pmatrix}$.

23. Dadas las matrices $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-1&m\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&-3&5\\-2&4&-6\end{pmatrix}$ y $D=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&0\end{pmatrix}$.

    a) ¿Para qué valores de m existe B^{-1}? Para $m=1$, calcula B^{-1}.

    b) Para $m=1$ halla la matriz X tal que $XB+C=D$.

24. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\2&3&2\\-3&-3&-2\end{pmatrix}$ e I (matriz identidad de orden 3):

    a) Calcula las matrices $(A-I)^2$ y $A(A-I)$.

    b) Justifica que la matriz A es invertible.

    c) Comprueba que no existe la matriz inversa de $A-I$.

    d) Determina el valor del parámetro λ para que se verifique $A^{-1}=\lambda(A-2I)$.

25. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}$, halla la matriz X tal que $XA+A^t=2I$.

26. Calcula A^n y B^n siendo $A=\begin{pmatrix}1&1/7&1/7\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix}$.

27. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}4&5&-1\\-3&-4&1\\-3&-4&0\end{pmatrix}$, calcula A^2, A^3,…, A^{128}.

28. Determina, caso de que sea posible, un valor de k para que la matriz $(A-kI)^2$ sea la matriz nula, siendo $A=\begin{pmatrix}0&-1&-2\\-1&0&-2\\1&1&3\end{pmatrix}$.

29. Estudia el rango de las siguientes matrices según el valor del parámetro k:

$$M=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 2\\ 2 & 1 & k\end{pmatrix},\ N=\begin{pmatrix}2 & -1 & 4\\ -2 & 1 & 3\\ 1 & k & 2\end{pmatrix},\ P=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2 & -1\\ 2 & 6 & 4 & k\\ 4 & 12 & 8 & -4\end{pmatrix},\ Q=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0 & 2\\ 1 & 3 & 1 & 0\\ 2 & 10 & 3 & k\end{pmatrix}$$

30. Calcula una matriz X que conmute con la matriz A, esto es, $AX=XA$, siendo $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

31. Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix}$. Determina la matriz X que verifica $AXA=2BA$.

32. Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}5 & 2 & 0\\ 2 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}a & b & 0\\ c & c & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

    a) Encuentra las condiciones que deben cumplir los coeficientes a, b y c para que se verifique $AB=BA$.

    b) Para $a=b=c=1$, calcula B^{10}.

33. Una matriz cuadrada se llama ortogonal cuando su inversa coincide con su traspuesta.

    Calcula x e y para que la matriz $A=\begin{pmatrix}3/5 & x & 0\\ y & 3/5 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ sea ortogonal.

34. Halla todas las matrices $X=\begin{pmatrix}a & 0\\ b & c\end{pmatrix}$ con $a,\ b,\ c\in\mathbb{R}$, que satisfacen la ecuación matricial $X^2=2X$.

35. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 3 & 2 & 2\end{pmatrix}$, halla la matriz X que verifica la siguiente relación: $XC+A=C+A^2$.

36. Halla la matriz X que verifica $AX+B=3X$ siendo $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$.

37. Despeja la matriz X en la siguiente igualdad: $AXA+B=B(2A+I)$. Calcula la matriz X en el caso de que $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}$.

38. Una empresa conservera elabora tres tipos de latas de cangrejo L_1, L_2 y L_3. Para ello necesita hojalata, cangrejo, aceite y sal. Dos almacenes se encargan de distribuir el producto a las tiendas. Considera las siguientes matrices:

    $$A=\begin{pmatrix}100 & 200 & 150\\ 120 & 250 & 100\end{pmatrix}\ \text{y}\ B=\begin{array}{c}L_1\\ L_2\\ L_3\end{array}\begin{pmatrix}90 & 30 & 50 & 10\\ 100 & 50 & 90 & 15\\ 105 & 40 & 75 & 10\end{pmatrix}$$

    , donde A representa la demanda de los almacenes y B la cantidad de material en gramos por lata.

    El coste, en euros, de cada gramo de material es $0,01$ la hojalata; $0,05$ el cangrejo; $0,04$ el aceite y $0,001$ la sal.

    a) Escribe la matriz de costes C, de forma que puedas multiplicarla por la matriz de materiales.

    b) Calcula e interpreta AB, BC y ABC.

39. En un edificio residencial hay tres tipos de viviendas: $V1$, $V2$ y $V3$. Las viviendas $V1$ tienen 4 ventanas pequeñas y 3 ventanas grandes; las $V2$ tienen 5 ventanas pequeñas y 4 ventanas grandes, y las $V3$, 6 pequeñas y 5 grandes. Cada ventana pequeña tiene 2 cristales y 4 bisagras, y las grandes, 4 cristales y 6 bisagras.
    a) Escribe una matriz que describa el número y el tamaño de las ventanas de cada vivienda y otra que exprese el número de cristales y bisagras de cada tipo de ventana.
    b) Calcula la matriz que expresa el número de cristales y de bisagras de cada tipo de vivienda.
40. La tabla siguiente muestra la cantidad de vitaminas A, B y C que posee cada uno de los productos P, Q, R y S por unidad de peso:

$$\begin{array}{c} \\ P \\ Q \\ R \\ S \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

    a) Queremos elaborar una dieta en la que entren todos los productos, de manera que contenga 20 unidades de vitamina A, 25 de vitamina B y 6 de C. ¿Es posible hacerlo? ¿De cuántas formas?
    b) Obtén, en función de la cantidad Q que entre en la dieta, las cantidades de los otros productos. ¿Entre qué valores habría de estar la cantidad de producto Q?
41. Comprueba que si A es una matriz cuadrada tal que $A^2 = 2A - I$, donde I es la matriz identidad, entonces A es invertible. ¿Cuál es la expresión de A^{-1}? Utiliza esto último para calcular la inversa de $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.
42. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, halla una matriz X que verifique la ecuación $XA + A = A^{-1}$.
43. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, prueba que se verifica la igualdad $A^3 + I = 0$ y utilízala para obtener A^{10}.
44. Si A es una matriz regular de orden n y existe una matriz B tal que $AB + BA = O$ (O es la matriz nula), probar que $BA^{-1} + A^{-1}B = O$.
    Si $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, halla una matriz $B \neq O$ tal que $AB + BA = 0$.
45. Despeja la matriz X en la igualdad $(X + A)^2 = X^2 + XA + I$ y obtén X en el caso $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ (teniendo en cuenta que I es la matriz identidad de orden dos).
46. Demuestra que si A es una matriz regular, al despejar X en la ecuación $XA^2 + BA = A^2$ se obtiene $X = I - BA^{-1}$.
47. Sea A una matriz cuadrada que verifica la igualdad $A^2 - 2A = 3I$.
    a) Demuestra que A es invertible y expresa A^{-1} en función de A e I.
    b) Expresa A^3 como combinación lineal de A e I.
    c) Halla todas las matrices simétricas de orden 2 que verifican $A^2 - 2A = 3I$.