## Integración por partes

1. Aplica la integración por partes para resolver las siguientes integrales:

a) $\int xe^{2x}dx$ ; b) $\int x^2 \ln x\,dx$ ; c) $\int 3x\cos x\,dx$ ; d) $\int \ln(2x-1)\,dx$ ; e) $\int \frac{x}{e^x}dx$ ;

f) $\int \arccos x\,dx$ ; g) $\int x^2 \operatorname{sen} x\,dx$ ; h) $\int x^2 e^{2x}dx$ ; i) $\int e^x \cos x\,dx$ ; j) $\int (x+1)^2 e^x dx$ ;

## Integrales racionales

2. Resuelve las siguientes integrales racionales:

a) $\int \frac{1}{x^2+x-6}dx$ ; b) $\int \frac{3x^3}{x^2-4}dx$ ; c) $\int \frac{dx}{(x^2-25)(x-4)}$ ; d) $\int \frac{x^2+1}{x^2+x}dx$ ;

e) $\int \frac{4}{x^2+x-2}dx$ ; f) $\int \frac{x^2}{x^2+4x+3}dx$ ; g) $\int \frac{2x^2-5x+3}{x^2-3x+2}dx$ ; h) $\int \frac{-16}{x^2-2x-15}dx$ ;

i) $\int \frac{2x-4}{(x-1)^2(x+3)}dx$ ; j) $\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}dx$ ; k) $\int \frac{1}{(x-1)(x+3)^2}dx$ ; l) $\int \frac{3x-2}{x^2-4}dx$

## Integrales por sustitución

3. Aplica el método de sustitución para resolver las siguientes integrales:

a) $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x}}$ ; b) $\int x\sqrt[3]{x+2}\,dx$ ; c) $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt[3]{x}-1}$ ; d) $\int \frac{dx}{(3-x)\sqrt{2-x}}$

## Integrales de todo tipo

4. Resuelve las siguientes integrales usando el método que creas más adecuado:

a) $\int x^4 e^{x^5}dx$ ; b) $\int x\operatorname{sen} x^2 dx$ ; c) $\int x\cdot 2^{-x}dx$ ; d) $\int x^3 \operatorname{sen} x\,dx$ ; e) $\int \sqrt{(x+3)^5}\,dx$ ;

f) $\int \frac{-3x}{2-6x^2}dx$ ; g) $\int e^{2x+1}\cos x\,dx$ ; h) $\int x^5\cdot e^{-x^3}dx$ ; i) $\int \frac{x+2}{x^2+1}dx$ ; j) $\int \frac{1}{(x^2-1)^2}dx$ ;

k) $\int \frac{x+2}{2x^2+x-1}dx$ ; l) $\int \frac{x-1}{4x^2-9}dx$ ; m) $\int \frac{2x^2+7x-1}{x^3+x^2-x-1}dx$ ; n) $\int \frac{3x-1}{2x^2+8}dx$ ; ñ) $\int \frac{\ln x}{x}dx$ ;

o) $\int \frac{1-\operatorname{sen} x}{x+\cos x}dx$ ; p) $\int \frac{1}{x\ln x}dx$ ; q) $\int \frac{1+e^x}{e^x+x}dx$ ; r) $\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$ ; s) $\int \ln(x-3)\,dx$ ;

t) $\int \frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$ ; u) $\int \ln(x^2+1)\,dx$ ; v) $\int \frac{\operatorname{sen}(1/x)}{x^2}dx$ ; w) $\int \frac{2x}{x+2}dx$ ; x) $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx$ ;

5. Resuelve las siguientes integrales usando el método que creas más adecuado

a) $\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^4 x}dx$ ; b) $\int (\ln x)^2 dx$ ; c) $\int e^x \cos e^x dx$ ; d) $\int \frac{1}{1-x^2}dx$ ; e) $\int \frac{(1-x)^2}{1+x}dx$ ;

f) $\int \frac{e^x}{1-\sqrt{e^x}}dx$ ; g) $\int \sqrt{3x-2}\,dx$ ; h) $\int \frac{x+4}{\sqrt{1-x^2}}dx$ ; i) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-(2x-3)^2}}$ ; j) $\int \frac{5x^2}{x^3-3x^2+3x-1}dx$ ;

k) $\int \frac{x^2-3}{x^2-2x+5}dx$ ; l) $\int \frac{x^4-2x-6}{x^3+x^2-2x}dx$ ; m) $\int \frac{2x^2+12x-6}{(x-2)(x^2+9)}dx$ ; n) $\int x\sqrt{x+1}\,dx$ ; ñ) $\int \frac{dx}{x-\sqrt[4]{x}}$ ;

o) $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$ ; p) $\int \frac{1}{x\sqrt{x+1}}dx$ ; q) $\int \frac{1}{x+\sqrt{x}}dx$ ; r) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx$ ; s) $\int \frac{1}{1+e^x}dx$ ;

t) $\int \frac{x+3}{\sqrt{9-x^2}}dx$ ; u) $\int \frac{dx}{e^{2x}-3e^x}$ ; v) $\int \frac{\operatorname{sen}(\operatorname{tg} x)}{\cos^2 x}dx$ ; w) $\int \frac{e^{3x}-e^x}{e^{2x}+1}dx$ ; x) $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx$

6. Para resolver la integral $\int \cos^3 x\,dx$, hacemos: $\cos^3 x = \cos x \cos^2 x = \cos x\left(1-\operatorname{sen}^2 x\right) = \cos x - \cos x \operatorname{sen}^2 x$

   Resuélvela y calcula después $\int \operatorname{sen}^3 x\,dx$.

7. Calcula las siguientes integrales utilizando las relaciones trigonométricas:

   a) $\int \left(\operatorname{sen}^2 x + 2\cos 2x\right)dx$ ; b) $\int \frac{\left(1-2\cos^2 x\right)\cos x}{\cos 2x}dx$ ; c) $\int \left(\operatorname{sen}^2 x \cdot \operatorname{sen} 2x\right)dx$ ; e) $\int \left(\cos^2 x - \cos 2x\right)dx$

8. Calcula la integral $\int \frac{x^3}{(x+1)^2}dx$ por descomposición en fracciones simple y mediante un cambio de variable.

9. Resuelve las siguientes integrales:

   a) $\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$ ; b) $\int \frac{(x+5)\,dx}{x^2+2x+3}$ ; c) $\int \frac{x+1}{x^3+2x^2+3x}dx$ ;

   d) $\int \frac{2x-1}{x^3+x}dx$ ; e) $\int \frac{x^2+3x+8}{x^2+9}dx$ ; f) $\int \frac{dx}{(x+1)^2\left(x^2+1\right)}$

10. Encuentra la primitiva de $f(x) = \frac{3x}{1-x^2}$ que pasa por el punto $(0,3)$.

11. Halla la función $F$ para la que $F'(x) = \frac{1}{x^2}$ y $F(1) = 2$.

12. De todas las primitivas de la función $y = 4x-6$, ¿cuál de ellas toma el valor $4$ para $x=1$?

13. Halla $f(x)$ sabiendo que $f''(x) = 6x$, $f'(0) = 1$ y $f(2) = 5$.

14. Encuentra una primitiva de $f(x) = x^2 \operatorname{sen} x$ cuyo valor para $x=0$ sea $1$.

15. Determina la función $f(x)$ sabiendo que $f''(x) = x\ln x$, $f'(1) = 0$ y $f(e) = \frac{e}{4}$.

16. Calcula la expresión de una función $f(x)$ tal que $f'(x) = xe^{-x^2}$ y $f(0) = \frac{1}{2}$.

17. De una función $y = f(x)$, $x > -1$, sabemos que tiene por derivada $y' = \frac{a}{1+x}$, donde $a$ es una constante. Determina la función si, además, sabemos que $f(0) = 1$ y $f(1) = -1$.

18. Dada la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\ln(1+x^2)$, halla la primitiva de $f$ cuya gráfica para por el origen de coordenadas.

19. Calcula el valor del parámetro $a$ para que una primitiva de la función $\int(ax^2+x\cos x+1)\,dx$ pase por $(\pi,-1)$.

20. Halla $\int e^{ax}(x^2+bx+c)\,dx$ en función de los parámetros $a$, $b$ y $c$.

21. Encuentra la función derivable $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ que cumple $f(1)=-1$ y tal que:

$$f'(x)=\begin{cases} x^2-2x & \text{si} \quad -1\le x<0 \\ e^x-1 & \text{si} \quad 0\le x\le 1 \end{cases}$$

22. De una función derivable se sabe que pasa por el punto $A(-1,-4)$ y que su derivada es:

$$f'(x)=\begin{cases} 2-x & \text{si} \quad x\le 1 \\ 1/x & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

a) Halla la expresión de $f(x)$.

b) Obtén la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x=2$.

23. Halla una primitiva $F(x)$ de la función $f(x)=3x^2-6x$ tal que $F(x)$ tenga un mínimo en el punto $(2,0)$. Determina los demás puntos singulares de $F(x)$.

24. Halla la función $f(x)$ de la que conocemos $f''(x)=e^x$, $f'(1)=0$ y $f(0)=1$.

25. Halla una primitiva $F(x)$ de la función $f(x)=2x$ tal que $F(x)\le 0$ en el intervalo $[-2,2]$.

26. Halla $f(x)$ sabiendo que $f''(x)=\cos\frac{x}{2}$, $f'(2\pi)=0$ y $f(0)=1$.

27. Halla la familia de curvas en las que la pendiente de las rectas tangentes a dichas curvas en cualquiera de sus puntos viene dada por la función $f(x)=\dfrac{x-2}{2x+4}$. Hallar la curva de esta familia que pasa por el punto $A\left(-\frac{5}{2},\frac{3}{4}\right)$

28. Calcula la función $f(x)$ sabiendo que $f''(x)=x$, que la gráfica de $f$ pasa por el punto $P(1,1)$ y que la tangente en $P$ es paralela a la recta de ecuación $3x+3y-1=0$.

29. Halla la función $F(x)$ tal que $F(0)=2$ y que sea primitiva de la función $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$.

30. Halla la ecuación de una curva $y=f(x)$ sabiendo que pasa por el punto $P(1,1)$ y que la pendiente de la recta tangente en un punto cualquiera es $3x+1$.

31. Dadas las funciones $f(x)=12x^3-8x^2+9x-5$ y $g(x)=6x^2-7x+2$, halla la función $H(x)=\int\dfrac{f(x)}{g(x)}dx$ que cumple la igualdad $H(1)=1$.

32. Calcula $\int\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x}dx$.

33. Resuelve las siguientes integrales mediante un cambio de variable: a) $\int\dfrac{x^2}{\sqrt{1-9x^6}}dx$ ; b) $\int\sqrt{81-25x^2}\,dx$.

34. Determina una función $f(x)$ que verifique la ecuación siguiente: $x^3 f'(x)+x^2+2x=3$.

35. De una función derivable $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ se sabe que pasa por el punto $(-1,0)$ y que su derivada es:

$$f'(x)=\begin{cases}-e^{-x} & \text{si} \quad x<0\\ -1 & \text{si} \quad x\geq 0\end{cases}$$

a) Halla la expresión de $f(x)$.

b) Obtén la ecuación de la recta tangente en $x=1$.

36. Determina una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sabiendo que la derivada segunda es constante e igual a $3$ y que la ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa $x=1$, es $5x-y-3=0$.

37. Calcula una primitiva de la función $f(x)=1/x$ que no tome ningún valor positivo en el intervalo $[1,\ e]$.

38. Resuelve las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int\frac{x+3}{\sqrt{x+2}}dx$ ; b) $\displaystyle\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$ ; c) $\displaystyle\int\sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)dx$ ; d) $\displaystyle\int x^2\sqrt{x+1}\,dx$

39. Para resolver la siguiente integral, multiplica numerador y denominador por $\cos x$ y haz después un cambio de variable: $\displaystyle\int\frac{dx}{\cos x}$.

Utiliza el procedimiento anterior para resolver las integrales siguientes: $\displaystyle\int\frac{dx}{\cos^3 x}$, $\displaystyle\int\frac{dx}{\operatorname{sen} x}$.

40. Sean $a$ y $b$ dos números reales cualesquiera. Calcula la siguiente integral indefinida (ten en cuenta los casos $a=0$ o $b=0$): $\displaystyle\int\frac{\cos x}{(a+b\operatorname{sen} x)^2}dx$.

41. Dada $f(x)=\operatorname{sen} x-\operatorname{sen}^3 x$, hallar su integral indefinida y la primitiva que pase por el punto $\left(\frac{\pi}{3},1\right)$.

42. Calcula $f(x)$ sabiendo que su derivada $f'(x)=3-2\operatorname{sen} x$ corta a la bisectriz del primer cuadrante en el punto $x=\pi$.

43. Calcula la siguiente primitiva, en la que suponemos que $a\neq 1$: $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2-(a+1)x+a}$.

44. Determina una función $f(x)$ de la que sabemos que $f'(x)=-\operatorname{sen} x$ y que la recta $x+y-2-\pi=0$ es tangente a su gráfica en el punto de abscisa $x=\pi$.

45. Calcula $\displaystyle\int 3x|x-2|\,dx$.

46. De una función continua $f(x)$ sabemos que tiene un mínimo en $(-1,-2)$ y que su derivada es:

$$f'(x)=\begin{cases}2x+2 & \text{si} \quad x\leq 1\\ 4 & \text{si} \quad x>1\end{cases}$$

a) Halla la expresión analítica de $f(x)$.

b) Escribe la ecuación de la recta tangente en $x=1$.

47. Para resolver integrales del tipo $\displaystyle\int\sqrt{a^2-b^2x^2}\,dx$ se utiliza el cambio de variable $x=\frac{a}{b}\operatorname{sen} t$. Úsalo para calcular:

a) $\displaystyle\int\sqrt{100-25x^2}\,dx$ ; b) $\displaystyle\int\sqrt{25-64x^2}\,dx$ ; c) $\displaystyle\int\sqrt{2-x^2}\,dx$ ; d) $\displaystyle\int\sqrt{\frac{9}{16}-25x^2}\,dx$