1. Indica el dominio de las siguientes funciones:

   a) $y=\sqrt{x^2+3x+4}$; b) $y=\dfrac{1}{\sqrt{3x-21}}$; c) $y=\ln\left(4-\sqrt{x}\right)$; d) $y=\dfrac{1}{\arccos(x-2)}$;

   e) $y=\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$; f) $y=\dfrac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 x-1}}$

2. Estudia la simetría de las siguientes funciones:

   a) $y=x^2+1$; b) $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-3}}$; c) $y=\operatorname{tg}\pi x$; d) $y=e^{|x|}$; e) $y=\dfrac{|x|}{x^2-2x}$; f) $y=2\cos\dfrac{x}{2}$

3. Determina el periodo de las siguientes funciones:

   a) $y=\operatorname{sen}3x$; b) $y=\operatorname{sen}2\pi x$; c) $y=\operatorname{tg}\pi x$; d) $y=\operatorname{sen}x+\cos 2x$;

   e) $y=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)\cdot\operatorname{sen}x$; f) $y=\operatorname{sen}\left(x^2+1\right)$

4. Halla las asíntotas verticales de estas funciones e indica la posición relativa de cada curva respecto a ellas:

   a) $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$; b) $y=\dfrac{2x-2}{\sqrt{x^2-9}}$; c) $y=\dfrac{1}{\ln x}$; d) $y=\dfrac{x(x-1)}{x^2-2x}$; e) $y=\dfrac{1}{1-\operatorname{sen}^2 x}$; f) $y=\dfrac{1}{\cos\frac{x}{2}}$

5. Estudia y representa las siguientes funciones:

   a) $y=x^3+3x^2$; b) $y=x^3-3x^2+5$; c) $y=\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{9}{2}x^2+10$; d) $y=\dfrac{5x^4-x^5}{64}$;

   e) $y=x^5-5x^3$; f) $y=(x-1)^3-3x$; g) $y=x^4-4x^2$; h) $y=1-(x-1)^3$

6. Estudia las ramas infinitas, intervalos de crecimiento y de decrecimiento, máximos, mínimos y puntos de inflexión de las siguientes funciones. Represéntalas gráficamente:

   a) $y=3+(2-x)^3$; b) $y=2-(x-3)^4$; c) $y=(x+1)^6-5$;

   d) $y=3-(1-x)^3$; e) $y=x(x-1)(x+3)$; f) $y=(x-2)^2(x+1)x^3$

7. En las siguientes funciones estudia su dominio, asíntotas y posición de la curva respecto de estas, y represéntalas a partir de los resultados obtenidos.

   a) $y=\dfrac{1}{x^2}$; b) $y=\dfrac{1}{x^2-1}$; c) $y=\dfrac{x}{x^2-1}$; d) $y=\dfrac{x^2-1}{x}$; e) $y=\dfrac{x}{x^2+1}$; f) $y=x+\dfrac{1}{x^2}$;

   g) $y=\dfrac{x^3}{1-x^2}$; h) $y=\dfrac{x^3}{(1-x)^2}$; i) $y=\dfrac{4x^2}{1+x^4}$

8. Representa estas funciones estudiando previamente su dominio, asíntotas, ramas infinitas y extremos relativos.

   a) $y=\dfrac{1}{(x-1)(x-3)}$; b) $y=\dfrac{x-1}{x(x-3)(x+4)}$; c) $y=\dfrac{8-2x}{x(x-2)}$; d) $y=\dfrac{x^2(2x-1)}{(x-2)(x+1)}$

9. Representa las siguientes funciones racionales:

   a) $y=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$; b) $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$; c) $y=\dfrac{3x^2+x-2}{x^2+1}$; d) $y=\dfrac{x^3-x^2-4x+4}{2x^3}$;

   e) $y=\dfrac{x^3-7x^2+6}{x^4-x^2}$; f) $y=\dfrac{x^3-3x^2-9x+22}{x^3-x^2-2x}$

   Antes de hacer nada, en este ejercicio se recomienda, en primer lugar, simplificar la fracción si es posible. Recuérdese que si se simplifica la fracción dividiendo numerador y denominador por un factor del tipo $x-a$, hay una discontinuidad evitable en $x=a$.

10. Estudia y representa las siguientes funciones:

    a) $y=\sqrt[3]{4-x^2}$; b) $y=\sqrt{x^2-x}$; c) $y=\sqrt{x^2-4x+5}$; d) $y=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$

11. Estudia y representa las siguientes funciones:

    a) $y=\dfrac{x}{e^x}$; b) $y=\dfrac{\ln x}{x}$; c) $y=x\ln x$; d) $y=(x-1)e^x$; e) $y=e^{-x^2}$;

    f) $y=x^2e^{-x}$; g) $y=\dfrac{x^3}{\ln x}$; h) $y=\ln\left(x^2-1\right)$

12. Estudia y representa las siguientes funciones:

    a) $y=\operatorname{sen} x+\cos x$; b) $y=2\operatorname{sen} x-\cos 2x$; c) $y=\cos 2x-\cos 4x$;

    d) $y=\operatorname{sen} 3\pi x+2$; e) $y=\operatorname{sen} \pi x-2$; f) $y=\operatorname{tg} \pi x-\cos 2\pi x$

13. Dada la función $f(x)=\begin{cases}-x^2-2x+2 & \text{si } x<0\\ x^2-2x+2 & \text{si } x\geq 0\end{cases}$, indica sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento y sus extremos relativos. ¿Tiene algún punto de inflexión? Represéntala gráficamente.

14. Dada la función $f(x)=\begin{cases}x^3-3x+1 & \text{si } x<0\\ (x-1)^2 & \text{si } x\geq 0\end{cases}$, estudia sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento, sus extremos relativos y su curvatura. Represéntala gráficamente.

15. Considera la función $f(x)=\begin{cases}\operatorname{sen} x & \text{si } x\in[-2\pi,\,0)\\ x^2-2x & \text{si } x\in[0,\,3]\end{cases}$. Determina los puntos de corte con los ejes y sus extremos relativos. Dibuja su gráfica.

16. Considera la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2+1} & \text{si } x<0\\ -x+1 & \text{si } x\geq 0\end{cases}$. En el intervalo $(-\infty,\,0]$, estudia si tiene puntos de corte con los ejes, si la función crece o decrece, los puntos de inflexión y si tiene asíntotas. Dibuja la gráfica en todo $\mathbb{R}$.

17. Dibuja la gráfica de la siguientes funciones e indica en qué puntos no son derivables:

    a) $y=x+|x+2|$; b) $y=2x-|x-3|$; c) $y=|x|+|x-3|$; d) $y=x|x-1|$

18. Dada la función $f(x)=x^2|x-3|$, halla los puntos en los que f no es derivable, calcula sus máximos y sus mínimos y represéntala gráficamente.

19. Representa la siguiente función: $f(x)=\dfrac{|x+3|}{1+|x|}$.

20. Representa la función $f(x)=-\left|x^3-x^2+2\right|$.

21. Determina las asíntotas de las siguientes funciones:

    a) $y=\dfrac{\sqrt{1-x}}{3x}$; b) $y=\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{x}$

22. Realiza un estudio y representa cada una de las siguientes funciones:

    a) $y=\ln\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)$; b) $y=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$; c) $y=\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$; d) $y=\dfrac{e^{|x-1|}}{x^2+2x-3}$

23. La recta $y=2x+6$ es una asíntota oblicua de la función $f(x)=\dfrac{2x^2+1}{x-k}$. Halla el valor de k y representa la función así obtenida.

24. Sea la función $f(x)=x^2\cdot e^{-ax}$ con $a\neq 0$.
   a) Calcula el valor de a para que esta función tenga un extremo relativo en el punto de abscisa $x=2$.
   b) Clasifica los extremos cuando $a=2$.

25. Dada la función $f(x)=ax+b+\dfrac{8}{x}$, calcula a y b para que la gráfica de f pase por el punto $(-2,-6)$ y tenga, en ese punto, tangente horizontal. Para esos valores de a y b, representa la función.

26. Halla los valores de a, b y c para los cuales la función $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{x^2-4}$ tiene como asíntota horizontal la recta $y=-1$ y un mínimo en el punto $(0,1)$.

27. Dada la siguiente función: $f(x)=\dfrac{ax^4+1}{x^3}$
   a) Determina el valor de a para el que la función posee un mínimo relativo en $x=1$. Para ese valor de a, obtén los extremos relativos.
   b) Obtén las asíntotas de la gráfica de $y=f(x)$ para $a=1$.
   c) Esboza la gráfica de la función para $a=1$.

28. Una partícula se mueve a lo largo de la gráfica de la curva de ecuación $y=\dfrac{2x}{1-x^2}$, para $x>1$. En el punto $P\left(2.-\dfrac{4}{3}\right)$ la deja y se desplaza a lo largo de la recta tangente a dicha curva.
   a) Halla la ecuación de la tangente.
   b) Si se desplaza de derecha a izquierda, halla el punto en el que la partícula encuentra la asíntota vertical más próxima al punto P.
   c) Si el desplazamiento es de izquierda a derecha, halla el punto en el que la partícula encuentra al eje X.

29. Comprueba que la función $f(x)=\dfrac{|x|}{x+1}$ tiene dos asíntotas horizontales.

30. Sobre la gráfica de $y=|x^2-4|$ indica los intervalos de concavidad y convexidad. ¿Cuáles son sus puntos de inflexión?

31. La función $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ no está definida en $x=1$ ni en $x=-1$; sin embargo, tiene solo una asíntota vertical. Justifícalo.

32. Da un ejemplo de una función que tenga un mínimo en $x=1$ y que no sea derivable en dicho punto. Represéntala.

33. Da un ejemplo de una función derivable en $x=1$ con $f'(1)=0$ que no tenga máximo ni mínimo en ese punto.

34. ¿Tiene $f(x)=x+e^{-x}$ alguna asíntota? Si es así, hállala.

35. Haz un estudio completo de la función $f(x)=\dfrac{(x+1)^2}{e^x}$ y represéntala gráficamente.

36. Halla los máximos y mínimos de la función $f(x)=x\sqrt{x+3}$. Indica si tiene asíntotas y represéntala gráficamente.