1. Halla la ecuación de la recta tangente a las siguientes curvas en los puntos que se indican:
   a) $y=\ln\left(\operatorname{tg}2x\right)$ en $x=\dfrac{\pi}{8}$.
   b) $y=\sqrt{\operatorname{sen}5x}$ en $x=\dfrac{\pi}{6}$.
   c) $x^2+y^2-2x-8y+15=0$ en $x=2$.
   d) $y=\left(x^2+1\right)^{\operatorname{sen}x}$ en $x=0$.

2. Halla las tangentes a la curva $y=\dfrac{2x}{x-1}$ paralelas a la recta $2x+y=0$.

3. Obtén la ecuación de la recta tangente paralela al eje de abscisas en las siguientes curvas:
   a) $y=x\ln x$; b) $y=x^2e^x$; c) $y=\operatorname{sen}2x$

4. Halla el punto de la gráfica de $y=2\sqrt{x}$ en el que la tangente forma un ángulo de 60° con el eje X. Escribe la ecuación de esa tangente.

5. Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f\left(x\right)=x^3-3x^2+2x+2$ en $x=3$. ¿Existe alguna otra recta tangente a la gráfica de f que sea paralela a la que has hallado? En caso afirmativo, hállala.

6. Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y=4x^3-2x^2-10$ en su punto de inflexión.

7. Halla los puntos de la curva $y=3x^2-5x+12$ en los que la recta tangente a ella pase por el origen de coordenadas.

8. Halla los puntos de la curva $y=\dfrac{1}{4}x^2+4x-4$ en los que la recta tangente a esta pase por el punto $\left(0,-8\right)$. Escribe las ecuaciones de las rectas tangentes en dichos puntos.

9. Halla, en cada caso, las ecuaciones de las rectas tangentes paralelas al eje X:
   a) $y=\dfrac{x^3}{3\left(x-1\right)}$; b) $y=\dfrac{x^2}{\ln x}$; c) $y=\dfrac{x^2+2x}{e^x}$

10. Halla los máximos, los mínimos y los puntos de inflexión de las siguientes funciones:
    a) $y=x^3-6x^2+9x$; b) $y=\dfrac{x^3\left(3x-8\right)}{12}$; c) $y=x^4-2x^3$; d) $y=x^4+2x^2$; e) $y=\dfrac{1}{x^2+1}$; f) $y=e^x\left(x-1\right)$

11. Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, y los máximos y los mínimos de las siguientes funciones:
    a) $y=\dfrac{8-3x}{x\left(x-2\right)}$; b) $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$; c) $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$; d) $y=\dfrac{2x^2-3x}{2-x}$; e) $y=\dfrac{x^2-1}{x}$; f) $y=\dfrac{8}{x^2\left(x-3\right)}$

12. Estudia la concavidad, la convexidad y los puntos de inflexión de las siguientes funciones:
    a) $y=x^3-3x+4$; b) $y=x^4-6x^2$; c) $y=\left(x-2\right)^4$; d) $y=xe^x$; e) $y=\dfrac{2-x}{x+1}$; f) $y=\ln\left(x+1\right)$

13. Estudia si las siguientes funciones tienen máximos, mínimos o puntos de inflexión en el punto de abscisa $x=1$:
    a) $y=1+\left(x-1\right)^3$; b) $y=2+\left(x-1\right)^4$; c) $y=3-\left(x-1\right)^6$; d) $y=-3+2\left(x-1\right)^5$

14. Determina los máximos y los mínimos de las siguientes funciones:
    a) $f\left(x\right)=x+\dfrac{4}{\left(x-1\right)^2}$; b) $f\left(x\right)=x\ln x$; c) $f\left(x\right)=\operatorname{sen}x-\cos x$; d) $f\left(x\right)=e^{-x^2}$

15. Dadas las funciones $f\left(x\right)=\begin{cases}x^2+2x-1 & \text{si} \quad x\leq 1\\ 4x-2 & \text{si} \quad x>1\end{cases}$; $g\left(x\right)=\begin{cases}x^2+7x-4 & \text{si} \quad x<2\\ 2x^2+3x & \text{si} \quad x\geq 2\end{cases}$, comprueba si son derivables en $\mathbb{R}$ y determina sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus máximos y mínimos.

16. Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)=x|x|$. ¿Tiene máximos o mínimos? Determina los intervalos de concavidad y convexidad. ¿Tiene algún punto de inflexión?

17. Dada la función $f(x)=1+\dfrac{a}{x}+\dfrac{6}{x^2}$, calcula a sabiendo que $f(x)$ tiene un extremo relativo en el punto de abscisa $x=3$. ¿Se trata de un máximo o de un mínimo?

18. De la función $f(x)=ax^3+bx$ sabemos que pasa por $(1,1)$ y en ese punto tiene tangente paralela a la recta $3x+y=0$. Halla a y b.

19. Halla una función $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ que tenga un extremo relativo en el punto de abscisa $x=2$ y un punto de inflexión en el punto $P(1,2)$.

20. Calcula los coeficientes a, b y c de la función $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx$, sabiendo que la ecuación de la recta tangente a f en $x=0$ es $y=x$; y que tiene un extremo relativo en el punto $(-1,0)$.

21. Halla a, b, c y d para que $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ tenga un máximo relativo en el punto $(0,4)$ y un mínimo relativo en el punto $(2,0)$.

22. Sea $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ un polinomio que cumple que $f(1)=0$, $f'(0)=2$ y tiene dos extremos relativos para $x=1$ y $x=2$. Halla a, b, c y d.

23. Dada la función $y=ax^4+3bx^3-3x^2-ax$, calcula los valores de a y b sabiendo que tiene dos puntos de inflexión, uno en $x=1$ y otro en $x=1/2$.

24. La curva $y=x^3+ax^2+bx+c$ corta al eje de abscisas en $x=-1$ y tiene un punto de inflexión en el punto $(2,1)$ Calcula a, b y c.

25. La función $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ verifica que $f(1)=1$, $f'(1)=0$ y que f no tiene extremo relativo en $x=1$. Calcula a, b y c.

26. Sea $f(x)=x^3+ax^2+bx+5$. Halla a y b para que la curva $y=f(x)$ tenga en $x=1$ un punto de inflexión con tangente horizontal.

27. Halla el valor de c de modo que la función $y=\dfrac{e^x}{x^2+c}$ tenga un único punto crítico. ¿Se trata de un máximo, de un mínimo o de un punto de inflexión?

28. Calcula los valores de los parámetros a y b para que sea derivable la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-x}{e^x} & \text{si} \quad x\leq 0\\ x^2+ax+b & \text{si} \quad x>0\end{cases}$

Halla sus extremos relativos en el caso $a=-2$, $b=1$.

29. Halla el dominio de definición y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)=\ln\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$.

30. Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $x^2-y^2+2x-6=0$ en los puntos de ordenada $y=3$.

31. Determina los puntos de la circunferencia $(x-3)^2+(y+2)^2=16$ en los que la recta tangente a ella es paralela a la bisectriz del primer cuadrante.

32. Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva $y=\operatorname{arctg}\dfrac{x-1}{x+1}$ que es paralela a la recta $x-2y+3=0$.

33. Halla la ecuación de la tangente a la curva $y=x^{x/2}$ en el punto de abscisa $x=e$.

34. Estudia los intervalos de crecimiento y los máximos y los mínimos de la función $y=\left|x^2+2x-3\right|$.

35. Estudia la existencia de máximos y mínimos relativos y absolutos de la función $y=\left|x^2-4\right|$.

36. La curva $y=x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma$ corta al eje de abscisas en $x=1$ y tiene un punto de inflexión en $(3,2)$. Calcula los puntos de la curva que tengan recta tangente paralela al eje X.

37. Halla el ángulo que forman las rectas tangentes a las funciones $f(x)=2x-x^2$ y $g(x)=x^2-x-2$ en el punto de abscisa $x=2$.

38. Dada la función $f(x)=\left|x-3\right|(x+1)$, halla los puntos donde las tangentes son paralelas a la recta $y=6x-2$.

39. Dada la función $f(x)=4-x^2$, se pide:

    a) El punto de esa curva en el que la tangente es paralela a la cuerda que une los puntos $(-1,3)$ y $(2,0)$.

    b) Las rectas que pasan por el punto $(-2,1)$ y son tangentes a la curva.

40. Halla el valor que debe tener $a>0$ para que la función $f(x)=x^2\ln\dfrac{x}{a}$ tenga un punto singular en $x=e$.

41. Se considera la función $f(x)=\begin{cases}ax^2+bx+c & \text{si} \quad x\leq 0\\ x\ln x & \text{si} \quad x>0\end{cases}$. Determina a, b y c para que sea continua, tenga un máximo en $x=-1$ y la tangente en $x=-2$ sea paralela a la recta $y=2x$.

42. Dada la función $f(x)=\begin{cases}-x^2+px & \text{si} \quad x\leq 1\\ x^2+mx+n & \text{si} \quad x>1\end{cases}$, calcula los valores de m, n y p para que f sea derivable en $\mathbb{R}$ y tenga un extremo relativo en $x=-\dfrac{1}{2}$. ¿Se trata de un máximo o de un mínimo? ¿Existen otros puntos críticos o singulares?

43. Sea la función $f(x)=\begin{cases}x+2e^{-x} & \text{si} \quad x\leq 0\\ a\sqrt{b-x} & \text{si} \quad x>0\end{cases}$. Determina el valor de a y b sabiendo que $f(x)$ es derivable en $x=0$. ¿Tiene puntos singulares?

44. Halla los puntos de la parábola $y=x^2-1$ que se encuentran a distancia mínima del punto $A\left(-2,-\dfrac{1}{2}\right)$.

45. El nivel medio diario de CO_2 de una ciudad depende del número de habitantes, p, y viene dado por la función $C(p)=\sqrt{\dfrac{p^2}{2}+17}$, con p en miles y C en partes por millón (ppm). Si la evolución de la población de esa ciudad en t años es $p(t)=3{,}1+0{,}1t^2$, en miles de habitantes, ¿con qué rapidez estará variando la concentración de CO_2 en ese lugar dentro de tres años?

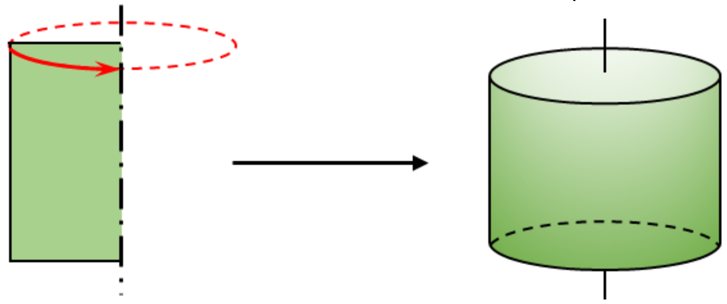
46. La velocidad de una partícula en m/s, viene dada por la función $v(t)=\left(t^2+2t\right)e^{-t}$ con $t\geq 0$. ¿En qué instante del intervalo $[0,\,3]$ se alcanza la velocidad máxima? Calcula $\lim\limits_{t\to+\infty} v(t)$ e interpreta el resultado.

47. En un experimento, la cantidad de agua en función del tiempo viene dada por la expresión

$$C(t)=\frac{2}{3}+10t+\frac{10}{t}+\frac{240}{t^3}$$

con $t\in[1,\,10]$, t en horas y $C(t)$ en litros. Halla cuál es la cantidad mínima de agua y en qué instante de tiempo se obtiene.

48. Calcula los extremos relativos, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los de concavidad y convexidad de las siguientes funciones:
    a) $f(x)=x^2+|x-2|$; b) $f(x)=3e^{-2|x|}$
49. Calcula el máximo y el mínimo absolutos en el intervalo $[-2,\,3]$ de la función $f(x)=\ln(x^2+1)+(x-3)$.
50. Se quiere construir un recipiente cónico de generatriz 10 cm y de capacidad máxima. ¿Cuál debe ser el radio de la base? ***Nota:*** el volumen del cono es $(1/3)\pi r^2h$ donde r es el radio de la base del cono y h su altura.
51. Halla los lados de una cartulina rectangular de perímetro 60 cm que, al girar alrededor de un lado vertical genere un cilindro de volumen máximo. ***Nota:*** el volumen del cilindro es $\pi r^2 h$ (r radio de la base y h altura).



52. Sean x e y dos números positivos cuyo producto vale 16. ¿Puede $x+y$ ser menor que 7? Razona la respuesta.
53. El radio de un círculo crece uniformemente con una velocidad de 2 cm/s. Halla la velocidad de crecimiento de su superficie cuando el radio sea 5 cm.
54. Siendo $h(x)$ la suma de las coordenadas del punto $P(x,\,f(x))$ de la gráfica de $f(x)=x^4+x^3+x^2-x+1$, calcula los extremos relativos de $h(x)$. ¿Tiene $h(x)$ algún extremo absoluto?
55. El punto $P(x,y)$ recorre la elipse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. Deduce las posiciones del punto P para que su distancia al punto $(0,0)$ es máxima y también aquellas para las que su distancia es mínima.
56. Las manecillas de un reloj miden 4 cm y 6 cm; uniendo sus extremos se forma un triángulo. Demuestra que el área de ese triángulo viene dada por $A(x)=12\,\text{sen}\,x$, donde x es el ángulo que forman las manecillas. Halla x para que el área del triángulo sea máxima y calcula dicha área.
57. En un cuadrado de lado 10 cm queremos apoyar la base de un cilindro cuya área lateral es 50 cm^2. ¿Cuál debe ser el radio del cilindro para que su volumen sea máximo?
58. Dada $f:[1,\,e]\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\frac{1}{x}+\ln x$, determinar cuáles de las rectas tangentes a la gráfica de f tienen la máxima pendiente.
59. En un triángulo isósceles de base 12 cm (el lado desigual) y altura 10 cm, se inscribe un rectángulo de forma que uno de sus lados esté sobre la base del triángulo y dos de sus vértices sobre los lados iguales. Expresar el área A del rectángulo en función de su base, x, y di cuál es el dominio de la función. Halla el valor máximo de esa función.
60. Queremos hacer un envase con forma de prisma regular de base cuadrada y capacidad 80 cm^3. Para la tapa y la superficie lateral, usamos un determinado material, pero para la base debemos emplear un material un 50% más caro. Halla las dimensiones de este envase para que precio sea el menor posible.
61. Un triángulo isósceles tiene el lado desigual de 12 m y la altura relativa a ese lado de 5 m. Encuentra un punto P sobre la altura tal que la suma de distancias de P a los tres vértices sea mínima.
62. De todas las rectas que pasan por el punto $(1,2)$, encuentra la que determina con los ejes de coordenadas, y en el primer cuadrante, un triángulo de área máxima.
63. En una circunferencia de radio r se traza la tangente en un punto cualquiera C y una cuerda AB paralela a dicha tangente. Demuestra que, para que el área del triángulo ABC sea máxima, la distancia de C a la cuerda deber ser $3/2$ del radio.

64. Comprueba que $f(x)=x^3-18x$, definida en el intervalo $\left[0,\,3\sqrt{2}\right]$, verifica las hipótesis del teorema de Rolle y encuentra el valor $c\in\left(0,\,3\sqrt{2}\right)$ para que $f'(c)=0$.

65. La función $y=x^3-5x^2+3x-2$, ¿cumple las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo $[0,\,4]$? En caso afirmativo, di cuál es el punto x_0 que cumple la tesis.

66. Se tiene la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & \text{si} \quad -2\le x\le -1\\ \dfrac{x^2-3}{2} & \text{si} \quad -1<x\le 0\end{cases}$. Prueba que f satisface las hipótesis del teorema del valor medio en $[-2,\,0]$ y calcula el o los puntos en los que se cumple el teorema.

67. ¿Es posible calcular a, b, c para que la función $f(x)=\begin{cases}5x+1 & \text{si} \quad x<1\\ ax^2+bx+3 & \text{si} \quad x\ge 1\end{cases}$ cumpla el teorema de Rolle en el intervalo $[0,\,c]$?

68. La función $f(x)=|\cos x|$ toma en los extremos del intervalo $[0,\,\pi]$ el valor 1. ¿Cumplirá el teorema de Rolle?

69. Sea f una función continua y derivable tal que $f(0)=3$. Calcula cuánto tiene que valer $f(5)$ para asegurar que en $[0,\,5]$ existe un c tal que $f'(c)=8$.

70. Calcula a y b para que $f(x)=\begin{cases}ax-3 & \text{si} \quad x<4\\ -x^2+10x-b & \text{si} \quad x\ge 4\end{cases}$ cumpla las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo $[2,\,6]$. ¿Dónde cumple la tesis?

71. Sea $f(x)=1-x^{2/3}$. Prueba que $f(1)=f(-1)=0$, pero que $f(x)$ no es nunca cero en el intervalo $[-1,\,1]$. Explica por qué este resultado contradice aparentemente el teorema de Rolle.

72. La derivada de una función f es positiva para todos los valores de la variable. ¿Puede haber dos números distintos, a y b, tales que $f(a)=f(b)$? Razónalo.

73. Calcula a, b y c para que la función $f(x)=\begin{cases}x^2+ax+b & \text{si} \quad x<2\\ cx+1 & \text{si} \quad x\ge 2\end{cases}$ cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[0,\,4]$. ¿En qué punto se cumple la tesis?

74. Dada la función $f(x)=\sqrt{\ln\left(3^x+x\right)+\ln\left(x^2-10x+20\right)}$, demuestra que existe un valor $a\in(1,\,2)$ tal que $f'(a)=0$. Menciona y justifica los resultados teóricos empleados.

75. Razona adecuadamente la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones.
    a) Una función que no sea una recta puede tener infinitos puntos en los que su recta tangente sea $y=1$.
    b) Si $f'(a)=0$, $f''(a)=0$, entonces f no puede tener ni máximo ni mínimo en $x=a$.
    c) Si un polinomio de grado 3 tiene un mínimo en $x=2$, ese mínimo no puede ser mínimo absoluto.
    d) Una función continua en $[0,\,5]$, que no es derivable en $x=3$, no puede tener un máximo en $x=3$.
    e) Si $y=f(x)$ es creciente en $x=a$, entonces $y=-f(x)$ es decreciente en $x=a$.
    f) Si $f'(a)=0$, f tiene un máximo o un mínimo en $x=a$.
    g) Si $f'(a)=0$, $f''(a)=0$ y $f'''(a)=-5$, f tiene un punto de inflexión en $x=a$.

Soluciones

1. a) $y=4x-\frac{\pi}{2}$; b) $y-\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{5\sqrt{6}}{2}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$; c) Hay dos soluciones: $y=-x+7$, $y=x+1$; d) $y=1$.
2. $y=-2x$, $y=-2x+8$.
3. a) $y=-\frac{1}{e}$; b) $y=0$, $y=\frac{4}{e^2}$ -, c) $y=-1$, $y=1$.
4. El punto de la gráfica de $y=2\sqrt{x}$ en el que la tangente forma un ángulo de 60° con el eje X es el $\left(\frac{1}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

   La ecuación de esa recta tangente es $y=\sqrt{3}x+\frac{\sqrt{3}}{3}$.
5. $y=11x-25$. Hay otra recta tangente a la gráfica de f que es paralela a la anterior, en concreto en el punto $(-1,-4)$. Esta recta tangente tiene por ecuación $y=11x+7$.
6. $y=-\frac{1}{3}x-\frac{539}{54}$.
7. Los puntos de la curva $y=3x^2-5x+12$ en los que la recta tangente a ella pase por el origen de coordenadas son $(2,14)$ y $(-2,34)$. La recta tangente al primero es $y=7x$. La recta tangente al segundo es $y=-17x$.
8. Los puntos de la curva $y=\frac{1}{4}x^2+4x-4$ en los que la recta tangente a esta pase por el punto $(0,-8)$ son $(4,16)$ y $(-4,-16)$. Las ecuaciones de las rectas tangentes en dichos puntos son, respectivamente, $y=6x-8$ y $y=2x-8$.
9. a) $y=0$, $y=\frac{9}{4}$; b) $y=0$, $y=2e$; c) $y=\frac{2+2\sqrt{2}}{e^{\sqrt{2}}}$, $y=e^{\sqrt{2}}\left(2-2\sqrt{2}\right)$
10. a) Hay un mínimo en $(3,0)$, un máximo en $(1,4)$ y un punto de inflexión en $(2,2)$.

    b) Hay un mínimo en $\left(2,-\frac{4}{3}\right)$ y dos puntos de inflexión: uno en $(0,0)$ y otro en $\left(\frac{4}{3},-\frac{64}{81}\right)$.

    c) Hay un mínimo en $\left(\frac{3}{2},-\frac{27}{16}\right)$ y dos puntos de inflexión: uno en $(0,0)$ y otro en $(1,-1)$.

    d) Solamente hay un mínimo en el punto $(0,0)$. No hay ni máximos ni puntos de inflexión.

    e) Hay un máximo en $(0,1)$ y dos puntos de inflexión: uno en $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{3}{4}\right)$ y otro en $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{3}{4}\right)$.

    f) Hay un mínimo en $(0,-1)$ y un punto de inflexión en $\left(-1,-\frac{2}{e}\right)$.
11. a) Es creciente en $(-\infty,\ 0)\cup\left(0,\ \frac{4}{3}\right)\cup(4,\ +\infty)$ y decreciente en $\left(\frac{4}{3},\ 2\right)\cup(2,\ 4)$. Tiene un máximo en el punto $\left(\frac{4}{3},-\frac{9}{2}\right)$ y un mínimo en el punto $\left(4,-\frac{1}{2}\right)$.

    b) Es creciente en $(-\infty,\ -1)\cup(-1,\ 0)$ y decreciente en $(0,\ 1)\cup(1,+\infty)$. Tíene un máximo en el punto $(0,-1)$

c) Es creciente en $\left(-\infty,\,-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3},\,+\infty\right)$ y decreciente en $\left(-\sqrt{3},\,-1\right)\cup\left(-1,\,1\right)\cup\left(1,\,\sqrt{3}\right)$. Tiene un máximo en el punto $\left(-\sqrt{3},-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ y un mínimo en el punto $\left(\sqrt{3},\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

d) Es creciente en $\left(1,\,2\right)\cup\left(2,\,3\right)$ y decreciente en $\left(-\infty,\,1\right)\cup\left(3,\,+\infty\right)$. Tiene un máximo en el punto $\left(3,-9\right)$ y un mínimo en el punto $\left(1,-1\right)$.

e) La función es creciente en todo su domino. Por tanto, no tiene ni máximos ni mínimos.

f) Es creciente en $\left(0,\,2\right)$ y decreceinte en $\left(-\infty,\,0\right)\cup\left(2,\,3\right)\cup\left(3,\,+\infty\right)$. Tiene un máximo en el punto $\left(2,-2\right)$.

12. a) Es convexa en $\left(-\infty,\,0\right)$ y cóncava en $\left(0,\,+\infty\right)$. Tiene un punto de inflexión en $\left(0,4\right)$.

b) Es convexa en $\left(-1,\,1\right)$ y cóncava en $\left(-\infty,\,-1\right)\cup\left(1,\,+\infty\right)$. Tiene dos puntos de inflexión: $\left(-1,-5\right)$ y $\left(1,-5\right)$.

c) La función es cóncava en todo $\mathbb{R}$. Por tanto, no tiene puntos de inflexión.

d) Es convexa en $\left(-\infty,\,-2\right)$ y cóncava en $\left(-2,\,+\infty\right)$. Tiene un punto de inflexión en $\left(-2,-\dfrac{2}{e^2}\right)$.

e) Es convexa en $\left(-\infty,\,-1\right)$ y cóncava en $\left(-1,\,+\infty\right)$. No tiene puntos de inflexión.

f) Es convexa en todo su dominio, que es el intervalo $\left(-1,\,+\infty\right)$. No tiene puntos de inflexión.

13. a) No tiene ni máximos ni mínimos. Hay un punto de inflexión en $\left(1,1\right)$.

b) Hay un mínimo en el punto $\left(1,2\right)$. No hay máximos ni puntos de inflexión.

c) Hay un máximo en el punto $\left(1,3\right)$. No hay mínimos ni puntos de inflexión.

d) No tiene ni máximos ni mínimos. Hay un punto de inflexión en $\left(1,-3\right)$.

14. a) Hay un mínimo en el punto $\left(3,4\right)$. No tiene máximos.

b) Hay un mínimo en el punto $\left(\dfrac{1}{e},-\dfrac{1}{e}\right)$. No tiene máximos.

c) Dado $k\in\mathbb{Z}$, los máximos son los puntos $\left(\dfrac{3\pi}{4}+2k\pi,\sqrt{2}\right)$, y los mínimos son los puntos $\left(\dfrac{7\pi}{4}+2k\pi,-\sqrt{2}\right)$.

d) Hay un máxmo en el punto $\left(0,1\right)$. No tiene mínimos.

15. a) Es derivable en todo $\mathbb{R}$. Es decreciente en $\left(-\infty,\,-1\right)$ y creciente en $\left(-1,\,+\infty\right)$. Tiene un mínimo en el punto $\left(-1,-2\right)$.

b) Es derivable en todo $\mathbb{R}$. Es decreciente en $\left(-\infty,\,-\dfrac{7}{2}\right)$ y creciente en $\left(-\dfrac{7}{2},\,+\infty\right)$. Tiene un mínimo en el punto $\left(-\dfrac{7}{2},-\dfrac{65}{4}\right)$.

16. La función es creciente en todo $\mathbb{R}$. Por tanto, no tiene ni máximos ni mínimos. Es convexa en $\left(-\infty,\,0\right)$ y cóncava en $\left(0,\,+\infty\right)$. Tiene un punto de inflexión en $\left(0,0\right)$.

17. Para $a=-4$ la función tiene un mínimo en el punto $\left(3,\dfrac{1}{3}\right)$.

18. $a=-2$, $b=3$.

19. $f(x)=x^3-3x^2+4$.
20. La única solución factible según las condiciones es $a=3$, $b=3$, $c=1$, valores para los que la función sería $f(x)=x^4+3x^3+3x^2+x$. Pero se da el caso de que en el punto $(-1,0)$ esta función no tiene un extremo relativo, sino un punto de inflexión (¡compruébese!). Luego, en realidad, no habría solución posible.
21. $a=1$, $b=-3$, $c=0$, $d=4$.
22. $a=\dfrac{1}{3}$, $b=-\dfrac{3}{2}$, $c=2$, $d=-\dfrac{5}{6}$.
23. $a=-1$, $b=1$.
24. $a=-6$, $b=\dfrac{10}{3}$, $c=\dfrac{31}{3}$.
25. $a=-3$, $b=3$, $c=0$.
26. $a=-3$, $b=3$.
27. Para que la función tenga un único punto crítico, ha de ser $c=1$. En este caso el punto crítico es un punto de inflexión, en concreto se trata del punto $\left(1,\dfrac{e}{2}\right)$. En realidad, para este valor de c la función tiene un punto crítico más: otro punto de inflexión en $(-0{,}1795,\ 0{,}8097)$.
28. Para que la función sea derivable han de ser $a=-2$ y $b=1$. Además, para estos valores, la función tiene un mínimo en el punto $(1,0)$.
29. $\text{Dom}\, f=(-\infty,\ -1)\cup(1,\ +\infty)$. La función es creciente en $(1,\ +\infty)$ y decreciente en $(-\infty,\ -1)$.
30. Hay dos puntos de ordenada 3: $(3,3)$ y $(-5,3)$. En estos puntos las rectas tangentes son, respectivamente, $y=\dfrac{4}{3}x-1$, $y=-\dfrac{4}{3}x-\dfrac{11}{3}$.
31. Los puntos de la circunferencia $(x-3)^2+(y+2)^2=16$ en los que la recta tangente a ella es paralela a la bisectriz del primer cuadrante son $\left(3-2\sqrt{2},-2+2\sqrt{2}\right)$ y $\left(3+2\sqrt{2},-2-2\sqrt{2}\right)$.
32. $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}$.
33. $y-e^{e/2}=e^{e/2}(x-e)$.
34. Es creciente en $(-3,\ -1)\cup(1,\ +\infty)$ y decreciente en $(-\infty,\ -3)\cup(-1,\ 1)$. Tiene un máximo en el punto $(-1,4)$ y dos mínimos en los puntos $(-3,0)$ y $(1,0)$.
35. Tiene un máximo relativo en el punto $(0,4)$ (no tiene máximos absolutos). Y tiene dos minimos relativos que también son absolutos en los puntos $(-2,0)$ y $(2,0)$.
36. Los puntos de la curva que tienen recta tangente paralela al eje X son $(4,0)$ y $(2,4)$.
37. El ángulo que forman las rectas tangentes es de 45°.
38. Los puntos donde las tangentes son paralelas a la recta $y=6x-2$ son $(-2,-5)$ y $(4,5)$.
39. a) El punto es $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{15}{4}\right)$; b) Las rectas que se piden son: $y=6x+13$, $y=2x+5$.
40. $a=e^{3/2}$.
41. $a=-1$, $b=-2$, $c=0$.

42. $m=-5$, $n=2$, $p=-1$. El punto $x=-\frac{1}{2}$ se trata de un máximo. En concreto es el punto $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$. Hay otro punto crítico o singular: el punto $\left(\frac{5}{2},-\frac{21}{4}\right)$, que se trata de un mínimo.

43. $a=2$, $b=1$. Si se iguala la primera o la segunda derivada a cero las correspondientes ecuaciones o bien no tienen solución o bien las soluciones no son válidas porque no pertenecen al intervalo de definición. El único punto crítico es $x=0$, que es donde la función “pasa de ser una cosa a ser otra”. Este es un punto singular pues en él la función pasa de ser cóncava a ser convexa, luego es un punto de inflexión, en concreto se trata del punto $(0,2)$.

44. La mínima distancia se alcanza en el punto $(-1,0)$.

45. La rapidez con que estará variando la concentración de CO_2 en ese lugar dentro de 3 años es de 0,24 ppm, es decir, resulta un crecimiento de CO_2 de 0,24 partes por millón a los 3 años.

46. La velocidad máxima de la partícula se alcanza cuando $t=\sqrt{2}$ s. $\lim_{t\to+\infty} v(t)=0$. Esto quiere decir que a partir del instante $t=\sqrt{2}$ s, la velocidad de la partícula comienza a disminuir tendiendo a pararse cuando el tiempo aumenta. Se puede interpretar como que la partícula va desintegrándose con el tiempo.

47. La cantidad mínima se alcanza a las 3 horas y es aproximadamente de 42,89 litros.

48. a) Es decreciente en $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$ y creciente en $\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$. Tiene un mínimo en el punto $\left(\frac{1}{2},\frac{7}{4}\right)$. La función es cóncava en todo $\mathbb{R}$.

    b) Es creciente en $(-\infty,0)$ y decreciente en $(0,+\infty)$. Tiene un máximo en el punto $(0,3)$. La función es cóncava en $(-\infty,0)$ y convexa en $(0,+\infty)$.

49. Máximo absoluto: $(3,\ln 10)$. Mínimo absoluto: $(-2,\ln 5-5)$.

50. El radio de la base debe ser $r=\sqrt{\frac{200}{3}}\cong 8{,}16$ cm.

51. Los lados de la cartulina han de medir 20 cm y 10 cm.

52. No es posible que $x+y$ sea menor que 7. La razón estriba en que el mínimo de la función $f(x)=x+\frac{16}{x}$ es el punto $(4,8)$.

53. La velocidad de crecimiento de la superficie cuando el radio es de 5 cm es de $20\pi\cong 62{,}83$ cm²/s.

54. Hay solamente un extremo relativo, que es un mínimo relativo: el punto $(0,1)$. Además, este punto es también un mínimo absoluto.

55. La distancia máxima al origen de coordenadas se alcanza en los puntos $(-5,0)$ y $(5,0)$, y la distancia mínima se alcanza en los puntos $(0,-3)$ y $(0,3)$.

56. Para que el área del triángulo sea máxima las manecillas deben formar un ángulo de 90º, es decir, las manecillas deben estar en posición perpendicular la una de la otra. En este caso, el área del triángulo será de 12 cm².

57. El radio del cilindro para que su volumen sea máximo debe ser igual a 5 cm.

58. La recta tangente a la gráfica de f con pendiente máxima se consigue en el punto de abscisa $x=2$. En este caso la recta tangente es $y-\left(\frac{1}{2}+\ln 2\right)=\frac{1}{4}(x-2)$.

59. El área del rectángulo en función de su base es $A(x)=\dfrac{60x-5x^2}{6}$. Su dominio es $(0,12)$. El máximo de la función $A(x)$ se alcanza en $x=6$, que corresponde al rectángulo de base 6 cm y altura 5 cm. En este caso, el área es de 30 cm^2 (que es el área máxima).
60. El envase debe tener la base cuadrada de lado 4 cm y 5 cm de altura.
61. El punto buscado, situado sobre la altura, se encuentra a $2\sqrt{3}$ m de la base.
62. La recta que se pide es $y=-2x+4$.
63. Se trata de una demostración. Dar aquí la solución sería hacer el ejercicio en su totalidad. Sin embargo, daremos una pista: la altura del triángulo ha de ser mayor que el radio pues, de ser menor, se puede conseguir otro triángulo con la misma base y mayor altura, con lo que el área de este último sería mayor. Ahora hay que hacer un dibujo y lanzarse a la aventura.
64. Es fácil comprobar que se verifican las hipótesis del teorema de Rolle: f es continua en $\left[0,\,3\sqrt{2}\right]$ y derivable en $\left(0,\,3\sqrt{2}\right)$. Además, $f(0)=f\left(3\sqrt{2}\right)=54\sqrt{2}$. En este caso $c=\sqrt{6}$.
65. Sí que se cumplen las hipótesis del teorema del valor medio: f es continua en $[0\,,\,4]$ y derivable en $(0\,,\,4)$. Hay dos puntos x_0 en los que se cumple la tesis: $x_0=\dfrac{5+\sqrt{13}}{3}$ y $x_0=\dfrac{5-\sqrt{13}}{3}$.
66. Se cumplen las hipótesis del teorema del valor medio: f es continua en $[-2\,,\,0]$ y derivable en $(-2\,,\,0)$. Los puntos en los que se cumple la tesis son $c_1=-\sqrt{2}$ y $c_2=-\dfrac{1}{2}$.
67. Para que f sea continua y derivable tiene que ser $a=2$ y $b=1$, pero no existe ningún c tal que $f(x)$ cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en $[0,\,c]$.
68. No cumple el teorema de Rolle poque f no es derivable en el intervalo $(0,\,\pi)$.
69. $f(5)=43$.
70. $a=2$, $b=19$. La tesis se cumple en el punto $c=\dfrac{9}{2}$.
71. No se contradice el teorema de Rolle porque $f(x)$ no es derivable en el intervalo $(-1,\,1)$. De hecho, no existe la derivada en el punto $x=0$.
72. No es posible. Se puede razonar haciendo uso del teorema de Rolle.
73. $a=-3$, $b=5$ y $c=1$. La tesis se cumple en el punto $x=\dfrac{3}{2}$.
74. Hay que hacer uso adecuadamente del teorema de Rolle.
75. a) Verdadero ; b) Falso ; c) Verdadero ; d) Falso ; e) Verdadero ; f) Falso ; g) Verdadero