

1. Utilizar la definición de derivada de una función en un punto para hallar la derivada en $x = 2$, es decir, $f'(2)$, en los siguientes casos:

a) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$; b) $f(x) = \sqrt{x+2}$

2. Aplica la definición de derivada para hallar $f'(x)$ en cada caso:

a) $f(x) = x + \frac{1}{x}$; b) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

3. Calcular las derivadas de las siguientes funciones y, siempre que se pueda, simplificar el resultado:

I) $y = \frac{x^2-3}{x^2+3}$; II) $y = \sqrt[3]{3x^2}$; III) $y = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{2}{3}}$; IV) $y = \frac{2}{x} + \frac{x^2}{2}$; V) $y = \frac{\ln x}{x}$; VI) $y = 7e^{-x}$;

VII) $y = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$; VIII) $y = \operatorname{sen} x \cos x$; IX) $y = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$; X) $y = \ln(x^2+1)$; XI) $y = \operatorname{arctg} \frac{x}{3}$;

XII) $y = \cos^2(2x - \pi)$; XIII) $y = \operatorname{sen}^2 x$; XIV) $y = \sqrt{\operatorname{tg} x}$; XV) $y = \operatorname{sen} x^2$; XVI) $y = \operatorname{arctg}(x^2+1)$;

XVII) $y = (2\sqrt{x}-3)^7$; XVIII) $y = \log_2 \sqrt{x}$; XIX) $y = \operatorname{sen}^2 x^2$; XX) $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$; XXI) $y = \cos^5(7x^2)$;

XXII) $y = 3^x + 1$; XXIII) $y = \sqrt[3]{(5x-3)^2}$; XXIV) $y = \operatorname{arcsen} \frac{x^2}{3}$; XXV) $y = \ln(2x-1)$; XXVI) $y = \operatorname{tg} \frac{x^2}{2}$;

XXVII) $y = \ln(x^2-1)$; XXVIII) $y = \operatorname{arccos} \sqrt{2x}$; XXIX) $y = \ln \sqrt{1-x}$; XXX) $y = (\operatorname{arctg} x)^2$; XXXI) $y = 2^{\ln x}$;

XXXII) $y = \log_3(7x+2)$; XXXIII) $y = \ln\left(\operatorname{tg} \frac{3}{x}\right)$; XXXIV) $y = e^{4x}$; XXXV) $y = \ln\left(\ln \frac{1}{x}\right)$; XXXVI) $y = \sqrt{\operatorname{tg} x^2}$;

XXXVII) $y = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$; XXXVIII) $y = 5 \operatorname{tg}^3(3x^2+1)$; XXXIX) $y = \sqrt{x+\sqrt{x}}$; XL) $y = \sqrt[3]{\frac{x-2}{x+2}}$

4. Calcular la derivada de las siguientes funciones, aplicando previamente las propiedades de los logaritmos:

a) $y = \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$; b) $y = \ln(x \operatorname{tg} x)^2$; c) $y = \ln\left(\frac{\sqrt[3]{x^2-1}}{x^2}\right)$; d) $y = \ln(2^x \cdot \operatorname{sen}^2 x)$

5. Calcular la derivada de las siguientes funciones dada en forma implícita.

a) $x^2 + y^2 = 9$; b) $x^2 + y^2 - 4x - 6y = -9$; c) $y = \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$; d) $\frac{(x-1)^2}{8} - \frac{(y+3)^2}{14} = 1$;

e) $x^3 + y^3 = -2xy$; f) $xy^2 = x^2 + y$; g) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1$; h) $4x^2 + 4y^2 + 8x + 3 = 0$;

i) $x^2 + xy + y^2 = 0$; j) $yx - x^2 - y = 0$

6. Aplica la derivación logarítmica para derivar las siguientes funciones:

a) $y = x^{3x}$; b) $y = x^{x+1}$; c) $y = x^{e^x}$; d) $y = (\ln x)^{x+1}$; e) $y = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^x$; f) $y = x^{\operatorname{tg} x}$

7. Emplea el método que consideres más adecuado para hallar las derivadas de $y = f(x)$ o de $f(x, y) = 0$ (es decir, la función puede estar dada en forma explícita o implícita):

a) $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$; b) $y = (\sin x)^x$; c) $4x^2 + y^2 + 4x - 12y - 6 = 0$; d) $xy = e^x + y$; e) $\sqrt{xy} = \ln y$;

f) $x^2 - y^2 + 3xy + 5 = 0$

8. Obtén las derivadas de las siguientes funciones de dos maneras y comprueba, operando, que llegas al mismo resultado utilizando las reglas de derivación conocidas o aplicando la derivación logarítmica.

a) $y = \left(\frac{x^2 + 1}{x}\right)^3$; b) $y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$; c) $y = \sin^3 x \cos^2 x$; d) $y = \sqrt{x^2 + 1} \cdot \sqrt[3]{x^2}$

9. Calcula el valor de la derivada en $x = 0$ de cada una de las siguientes funciones:

a) $g(x) = e^{\sin f(x)}$ si $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$.

b) $h(x) = [\sin f(x)]^3$ si $f(0) = \frac{\pi}{4}$ y $f'(0) = 1$.

c) $j(x) = \sqrt{\ln f(x)}$ si $f(0) = e$ y $f'(0) = 1$.

10. Dada la función $f(x) = \begin{cases} 3x-1 & \text{si } x < 1 \\ x^2 + x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

a) Comprueba que f es continua y derivable en todo \mathbb{R} y halla $f'(0)$, $f'(3)$ y $f'(1)$.

b) ¿Cuál es la función derivada de f ?

c) ¿En qué punto se cumple $f'(x) = 5$?

11. Comprueba que la función $f(x) = \begin{cases} \ln(x-1) & \text{si } x < 2 \\ 3x-6 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ es continua pero no es derivable en $x = 2$.

12. Estudia la continuidad y derivabilidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 3 \\ -x^2 + 3x + 2 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$; b) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1 & \text{si } x < -1 \\ 2x + 2 & \text{si } -1 \leq x \leq 2 \\ -x^2 + 8x & \text{si } x > 2 \end{cases}$;

c) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$; d) $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \leq 0 \\ 1-x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

13. Calcula m y n para que $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + m & \text{si } x \leq 1 \\ -x^2 + nx & \text{si } x > 1 \end{cases}$ sea derivable en todo \mathbb{R} . ¿En qué puntos es $f'(x) = 0$?

14. Calcula a y b para que las siguientes funciones sean continuas y derivable en todo \mathbb{R} .

a) $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3x & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 - bx - 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$; b) $f(x) = \begin{cases} x^3 - x & \text{si } x \leq 0 \\ ax + b & \text{si } x > 0 \end{cases}$

15. Di si es derivable cada una de las funciones siguientes en los puntos que se indican. Si es derivable, calcula su derivada y, en caso contrario, di cuánto valen las derivadas laterales.

a) $f(x) = \begin{cases} 3x-1 & \text{si } x < 2 \\ x^2-x-3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ en $x_0 = 2$; b) $f(x) = \begin{cases} x^2-1 & \text{si } x \leq 1 \\ 2x-2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ en $x_0 = 1$;

c) $f(x) = |x|$ en $x_0 = 0$; d) $f(x) = |x^2 - x - 6|$ en $x_0 = -2$ y $x_1 = 3$.

16. Dada la función $f(x) = x \cdot |x| = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$, hallar $f'(x)$ y $f''(x)$ y representarlas gráficamente.

17. Estudia la continuidad y la derivabilidad de las siguientes funciones:

a) $y = |x-2|$; b) $y = |x^2 + 6x + 8|$; c) $y = x + |x-3|$; d) $y = x^2 + |x|$; e) $y = \frac{1}{1+|x|}$; f) $y = \frac{|x|}{x^2-1}$

18. Si $f(x) = x^2 \cdot |x|$, halla f' , f'' y f''' .

19. Estudia la continuidad y la derivabilidad de la función $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{2x(x-3)}{x^2-9} & \text{si } x \neq 0, x \neq 3 \\ 1 & \text{si } x = 3 \end{cases}$.

20. Estudia la derivabilidad en $x = 0$ de la siguiente función: $f(x) = \begin{cases} 1 + \sqrt[3]{x^2} & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - \sqrt[3]{x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

21. Determina, si es posible, el valor del parámetro a para que la función $f(x) = \begin{cases} x \ln x & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ a(1 - e^{1-x}) & \text{si } 1 < x \end{cases}$ sea derivable en todo su dominio de definición.

22. Averigua los puntos de derivada nula de estas funciones:

a) $y = \frac{x}{(x+3)^2}$; b) $y = \frac{16}{x^2(x-4)}$; c) $y = \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$; d) $y = e^x(x-1)$; e) $y = x^2e^x$; f) $y = \text{sen } x + \cos x$

g) $y = (3x-2x^2)e^x$; h) $y = \cos 2x - 2 \cos x$; i) $y = \sqrt{x^2-4x}$; j) $y = \sqrt{4x-x^2}$

23. Dada $y = \text{sen } x$, halla un punto en el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ en el que la tangente sea paralela a la cuerda que pasa por los puntos $(0,0)$ y $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$.

24. Halla la derivada de orden n de las funciones $f(x) = e^{2x}$ y $f(x) = x^n$.

25. Calcula la derivada de orden 50 y 51 de la función $y = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.

26. Demuestra que todas las derivadas de orden par de la función $f(x) = \text{sen } 2x$ se anulan en el origen de coordenadas.

Soluciones

1. a) $f'(2) = \frac{2}{9}$; b) $f'(2) = \frac{1}{4}$

2. a) $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$; b) $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

3. I) $y' = \frac{12x}{(x^2+3)^2}$; II) $y' = \frac{2}{\sqrt[3]{9x}}$; III) $y' = \frac{-4}{3\sqrt[3]{(1-x)(1+x)^5}}$; IV) $y' = -\frac{2}{x^2} + x = \frac{x^3-2}{x^2}$; V) $y' = \frac{1-\ln x}{x^2}$;

VI) $y' = -7e^{-x}$; VII) $y' = \frac{-4}{(e^x - e^{-x})^2}$; VIII) $y' = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$; IX) $y' = \frac{-\cos x}{\sin^2 x}$; X) $y' = \frac{2x}{x^2+1}$;

XI) $y' = \frac{3}{9+x^2}$; XII) $y' = -4 \cos(2x-\pi) \sin(2x-\pi) = -2 \sin(4x-2\pi)$; XIII) $y' = 2 \sin x \cos x = \sin 2x$;

XIV) $y' = \frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{2\sqrt{\operatorname{tg} x}}$; XV) $y' = 2x \cos x^2$; XVI) $y' = \frac{2x}{x^4+2x^2+2}$; XVII) $y' = \frac{7(2\sqrt{x}-3)^6}{\sqrt{x}}$; XVIII) $y' = \frac{1}{2x \ln 2}$;

XIX) $y' = 4x \sin x^2 \cos x^2 = 2x \sin(2x^2)$; XX) $y' = \frac{-1}{x^2+1}$; XXI) $y' = -70x \cos^4(7x^2) \sin(7x^2)$;

XXII) $y' = 3^x \ln 3$; XXIII) $y' = \frac{10}{3\sqrt[3]{5x-3}}$; XXIV) $y' = \frac{2x}{\sqrt{9-x^4}}$; XXV) $y' = \frac{2}{2x-1}$; XXVI) $y' = x + x \operatorname{tg}^2 \frac{x^2}{2}$;

XXVII) $y' = \frac{2x}{x^2-1}$; XXVIII) $y' = \frac{-1}{\sqrt{2x-4x^2}}$; XXIX) $y' = \frac{1}{2x-2}$; XXX) $y' = \frac{2 \operatorname{arctg} x}{1+x^2}$; XXXI) $y' = \frac{2^{\ln x} \cdot \ln 2}{x}$;

XXXII) $y' = \frac{7}{(7x+2) \ln 3}$; XXXIII) $y' = \frac{-3(1+\operatorname{tg}^2(3/x))}{x^2 \operatorname{tg}(3/x)}$; XXXIV) $y' = 4e^{4x}$; XXXV) $y' = \frac{-1}{x \ln(1/x)} = \frac{1}{x \ln x}$;

XXXVI) $y' = \frac{x(1+\operatorname{tg}^2 x^2)}{\sqrt{\operatorname{tg} x^2}}$; XXXVII) $y' = \frac{\sqrt{-x}}{x(x-1)}$; XXXVIII) $y' = 90x(\operatorname{tg}^2(3x^2+1) + \operatorname{tg}^4(3x^2+1))$;

XXXIX) $y' = \frac{2\sqrt{x+1}}{4\sqrt{x^2+x}\sqrt{x}}$; XL) $y' = \frac{4}{3(x+2)\sqrt[3]{(x+2)(x-2)^2}}$

4. a) $y' = \frac{1}{x^2-1}$; b) $y' = \frac{2}{x} + 2 \operatorname{cotg} x + 2 \operatorname{tg} x$; c) $y' = \frac{2x}{3(x^2-1)} - \frac{2}{x}$; d) $y' = \ln 2 + \frac{2 \cos x}{\sin x} = \ln 2 + \frac{2}{\operatorname{tg} x}$

5. a) $y' = \frac{-x}{y}$; b) $y' = \frac{2-x}{y-3}$; c) $y' = \frac{-9x}{16y}$; d) $y' = \frac{7(x-1)}{4(y+3)}$; e) $y' = \frac{-2y-3x^2}{3y^2+2x}$; f) $y' = \frac{2xy-y^2}{2xy-1}$;

g) $y' = \frac{25x}{9y}$; h) $y' = \frac{-x-1}{y}$; i) $y' = \frac{-2x-y}{x+2y}$; j) $y' = \frac{2x-y}{x-1}$

6. a) $y' = 3x^{3x}(\ln x + 1)$; b) $y' = x^{x+1} \left(\ln x + 1 + \frac{1}{x} \right)$; c) $y' = x^{e^x} \cdot e^x \left(\ln x + \frac{1}{x} \right)$;

d) $y' = (\ln x)^{x+1} \left(\ln(\ln x) + \frac{x+1}{x \ln x} \right)$; e) $y' = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} \right)^x \left(\ln \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} \right) + \frac{x \cos x}{\operatorname{sen} x} - 1 \right)$;

$$f) y' = x^{\operatorname{tg} x} \left((1 + \operatorname{tg}^2 x) \ln x + \frac{\operatorname{tg} x}{x} \right)$$

7. a) $y' = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \left(\ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} \right)$; b) $y' = (\operatorname{sen} x)^x \left(\ln(\operatorname{sen} x) + \frac{x \cos x}{\operatorname{sen} x} \right)$; c) $y' = \frac{-4x-2}{y-6}$;

d) $y' = \frac{e^x - y}{x-1}$; e) $y' = \frac{y^2}{2\sqrt{xy - xy}}$; f) $y' = \frac{2x+3y}{2y-3x}$

8. a) $y' = \frac{3(x^2+1)^2(x^2-1)}{x^4}$; b) $y' = \frac{1}{\sqrt{(1+x)(1-x)^3}}$; c) $y' = 3\operatorname{sen}^2 x \cos^3 x - 2\operatorname{sen}^4 x \cos x$;

d) $y' = \frac{5x^2+2}{3\sqrt{x^2+1}\sqrt[3]{x}}$

9. a) $g'(0) = 1$; b) $h'(0) = \frac{3\sqrt{2}}{4}$; c) $j'(0) = \frac{1}{2e}$

10. a) Es fácil comprobar que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$, luego f es continua en todo \mathbb{R} . También es fácil comprobar que

$f'(1^-) = f'(1^+)$, lo que demuestra que f es derivable en todo \mathbb{R} . $f'(0) = 3$. $f'(3) = 7$. $f'(1) = 3$.

b) $f'(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < 1 \\ 2x+1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

c) En el punto $x = 2$.

11. f es claramente continua en $x = 2$ ya que $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = 0$. Sin embargo, no es derivable en $x = 2$ porque las derivadas laterales en ese punto no coinciden: $f'(2^-) = 1$ y $f'(2^+) = 3$.

12. a) f es continua en todo \mathbb{R} , menos en $x = 3$, donde hay una discontinuidad de salto finito. f es derivable en todo \mathbb{R} , menos en $x = 0$ y en $x = 3$.

b) f es continua en todo \mathbb{R} , menos en $x = 2$, donde hay una discontinuidad de salto finito. f es derivable en todo \mathbb{R} , menos en $x = -1$ y en $x = 2$.

c) f es continua en todo \mathbb{R} . f es derivable en todo \mathbb{R} , menos en $x = 1$.

d) f es continua y derivable en todo \mathbb{R} .

13. Para que f sea derivable en todo \mathbb{R} deben ser $m = 2$ y $n = -1$. La derivada no se anula en ningún punto, es decir, no existe ningún $x \in \mathbb{R}$ tal que $f'(x) = 0$.

14. a) f es continua y derivable en todo \mathbb{R} si $a = 2$ y $b = -7$.

b) f es continua y derivable en todo \mathbb{R} si $a = -1$ y $b = 0$.

15. a) No es derivable en $x_0 = 2$ porque no es continua en dicho punto. Sin embargo $f'(2^-) = 3$. $f'(2^+) = 3$.

b) Sí es derivable en $x_0 = 1$ y $f'(1) = 2$.

c) No es derivable en $x_0 = 0$. $f'(0^-) = -1$. $f'(0^+) = 1$.

d) No es derivable en $x_0 = -2$, ni en $x_0 = 3$. $f'(-2^-) = -5$. $f'(-2^+) = 5$. $f'(3^-) = -5$. $f'(3^+) = 5$.

16. $f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } x > 0 \end{cases}$; f es derivable en 0 y $f'(0) = 0$.

$$f''(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}; f' \text{ no es derivable en } 0 \text{ pues } f'(0^-) = -2 \text{ y } f'(0^+) = 2.$$

17. a) Es continua en todo \mathbb{R} y es derivable en $\mathbb{R} - \{2\}$.

b) Es continua en todo \mathbb{R} y es derivable en $\mathbb{R} - \{-4, -2\}$.

c) Es continua en todo \mathbb{R} y es derivable en $\mathbb{R} - \{3\}$.

d) Es continua en todo \mathbb{R} y es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$.

e) Es continua en todo \mathbb{R} y es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$.

f) Es continua en $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ y es derivable en $\mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$

18. $f'(x) = \begin{cases} -3x^2 & \text{si } x < 0 \\ 3x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}; f''(x) = \begin{cases} -6x & \text{si } x < 0 \\ 6x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}; f'''(x) = \begin{cases} -6 & \text{si } x < 0 \\ 6 & \text{si } x > 0 \end{cases}$. Obsérvese que la tercera derivada no existe en $x = 0$ pues $f'''(0^-) = -6$ y $f'''(0^+) = 6$.

19. El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{-3\}$. Por tanto, en $x = -3$, f no es continua ni derivable.

f no es continua en $x = 0$ y, por tanto, tampoco es derivable en $x = 0$.

f es continua y derivable en $x = 3$. Además, la derivada en $x = 3$ es $f'(3) = \frac{1}{6}$.

En cualquier otro punto x que no sea ni -3 , ni 0 , ni 3 , f es derivable y $f'(x) = \frac{6}{(x+3)^2}$

20. Si $x \neq 0$ tenemos que $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} & \text{si } x < 0 \\ -\frac{2}{3\sqrt[3]{x}} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$, de donde se deduce que no existen las derivadas

laterales en $x = 0$. Por tanto, f no es derivable en $x = 0$.

21. f es derivable en todo su dominio de definición si $a = 1$.

22. a) $x = 3$; b) $x = \frac{8}{3}$; c) $x = -1$ y $x = 1$; d) $x = 0$; e) $x = -2$ y $x = 0$; f) $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, donde $k \in \mathbb{Z}$;

g) $x = -\frac{3}{2}$ y $x = 1$; h) $x = 0 + \pi k$, $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$ y $x = \frac{5\pi}{3} + 2\pi k$, donde $k \in \mathbb{Z}$; i) No tiene ningún punto de derivada nula.; j) $x = 2$.

23. $x \cong 0,88$.

24. $f^{(n)}(x) = 2^n e^{2x}$; b) $f^{(n)} = n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$

25. $y^{(50)} = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^{50} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)$; $y^{(51)} = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^{51} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

26. En general, las derivadas de orden par son de la forma $f^{(n)}(x) = k \cdot \operatorname{sen} 2x$, donde k es una constante. Por tanto, todas ellas se anulan en $x = 0$, puesto que $\operatorname{sen} 0 = 0$.