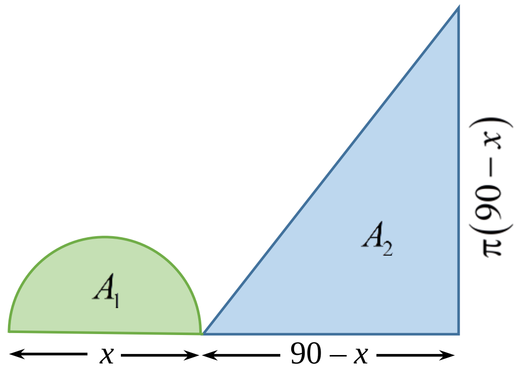
Enunciado

Determina cómo dividir un segmento de 90 cm en dos trozos, de forma que la suma del área del semicírculo cuyo diámetro es uno de ellos y el área de un triángulo rectángulo que tiene como base el otro trozo y cuya altura es π veces su base, sea mínima.
Nota: Recuerda que el área de un círculo de radio r es πr^2.

Solución



$$A_1 = \frac{\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{x^2}{4}$$

$$A_2 = \frac{(90-x)\pi(90-x)}{2} = \frac{\pi}{2}\cdot\left(8100-180x+x^2\right)$$

Llamemos $A(x)$ a la función área. Entonces:

$$A(x) = A_1 + A_2 = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{x^2}{4} + \frac{\pi}{2}\cdot\left(8100-180x+x^2\right) = \frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{x^2}{4}+8100-180x+x^2\right)$$

Si el área ha de ser mínima tendremos que $A'(x)=0$, es decir

$$A'(x) = \frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{x}{2}-180+2x\right) = 0 \Rightarrow \frac{x}{2}-180+2x=0 \Rightarrow x-360+4x=0 \Rightarrow 5x=360 \Rightarrow x=72$$

De hecho, en este caso, el área es

$$A(72) = \frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{72^2}{4}+8100-180\cdot 72+72^2\right) = 406\pi \text{ m}^2$$

La función área A está definida obviamente en el intervalo $[0,90]$. En los extremos del intervalo el área es

$A(0) = 2025\pi$ m², $A(90) = 506{,}25\pi$ m²

Estas dos últimas áreas son mayores que la obtenida para $x=72$. Por tanto el trozo lo deberemos de dividir en dos trozos, uno de 72 cm y otro de 90 cm.

Se puede comprobar que, efectivamente, $x=72$ es un mínimo:

Hacemos la segunda derivada de la función $A(x)$:

$A''(x) = \frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}+2\right) > 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Por tanto $x=72$ es un mínimo relativo porque $A'(72)=0$ y $A''(72)>0$.

Recordemos que si $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=0$, $f''(x)>0$, entonces x es un mínimo relativo de f.