Cinco problemas resueltos de geometría

Problema 1

Estudia la posición relativa de los planos siguientes según los distintos valores de m:

$$\pi_1 \equiv x + y + z = m + 1$$
$$\pi_2 \equiv mx + y + (m-1)\,z = m$$
$$\pi_3 \equiv x + my + z = 1$$

Solución

Si vemos los tres planos como un sistema de ecuaciones con $n = 3$ incógnitas, la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada son, respectivamente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & m-1 \\ 1 & m & 1 \end{pmatrix} \; ; \; A|b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & m+1 \\ m & 1 & m-1 & m \\ 1 & m & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Su determinante es $|A| = \left(1 + m - 1 + m^2\right) - \left(1 + m + m^2 - m\right) = m - 1$.

Por un lado, si $m \neq 1$, el determinante de A es distinto de cero, con lo que $r\,(A) = 3 = r\,(A|b) = n$ (sistema compatible determinado), con lo que los tres planos concurren en un único punto cuyas coordenadas son (resolvemos el sistema por la regla de Cramer):

$$x = \frac{\begin{vmatrix} m+1 & 1 & 1 \\ m & 1 & m-1 \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix}}{m-1} = \frac{\left(m + 1 + m - 1 + m^2\right) - \left(1 + m + m^3 - m\right)}{m-1} = \frac{-m^3 + m^2 + 2m - 1}{m-1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & m+1 & 1 \\ m & m & m-1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{m-1} = \frac{\left(m + m^2 - 1 + m\right) - \left(m + m^2 + m + m - 1\right)}{m-1} = \frac{-m}{m-1}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & m+1 \\ m & 1 & m \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix}}{m-1} = \frac{\left(1 + m + m^3 + m^2\right) - \left(m + 1 + m + m^2\right)}{m-1} = \frac{m^3 - m}{m-1} = m\,(m+1)$$

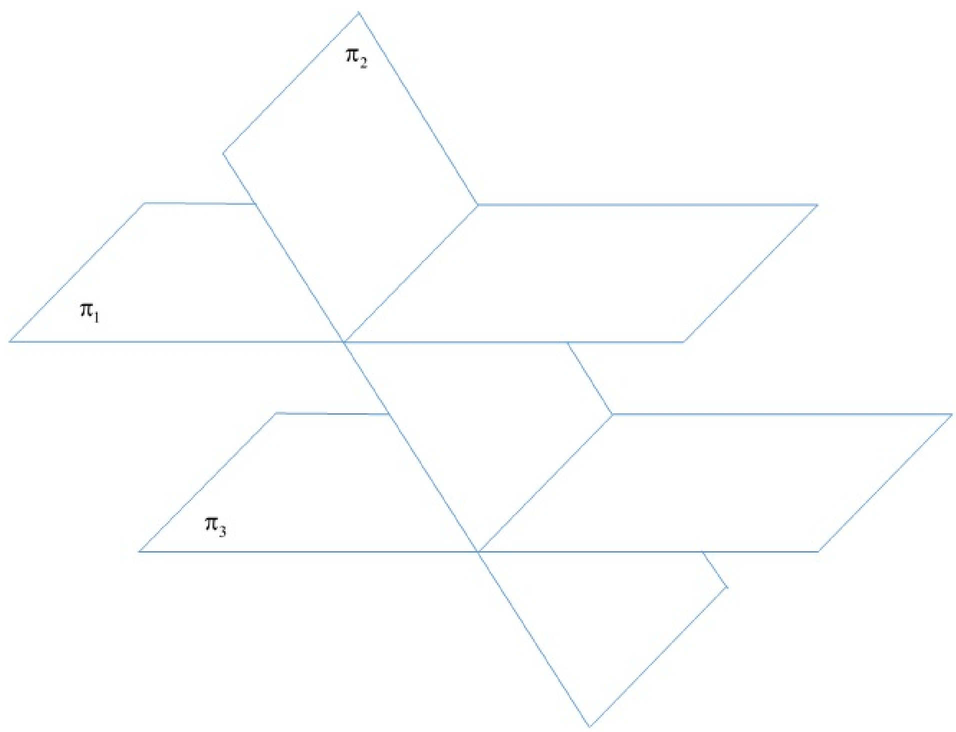
Por otro lado, si $m = 1$, el determinante de A es igual a cero. La matriz de los coeficientes y la matriz ampliada son, en este caso:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \; ; \; A|b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Se tiene claramente que $r(A) = 2$ pues A contiene al menos un menor de orden dos distinto de cero. Además, $r(A|b) = 3$ pues la matriz ampliada contiene un menor de orden tres distinto de cero:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (0+1+2) - (0+1+1) = 1$$

De lo anterior se deduce que si $m = 1$ el sistema es incompatible, con lo que los planos no tienen ningún punto en común.
Observando detenidamente los coeficientes de π_1, π_2 y π_3, se deduce que π_1 y π_3 son paralelos y distintos ya que $\frac{1}{1} = \frac{1}{1} = \frac{1}{1} \neq \frac{2}{1}$. Por tanto, la posición de los tres planos serán la que se representa en la siguiente figura.

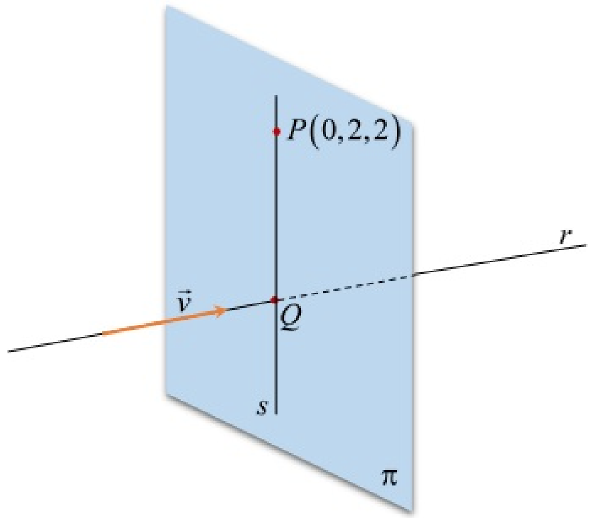


Problema 2

Dada la recta $r \equiv \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2x + z = 0 \end{cases}$, hallar la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a y pasa por el punto $P(0,2,2)$.

Solución

El punto $P(0,2,2)$ no está sobre r como fácilmente se puede comprobar. La recta buscada vendrá determinada por P y el punto Q de intersección de r con el plano π que pasa por P y es perpendicular a r (ver figura siguiente).



Dicho plano tiene por vector normal al vector director de r, que es

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-2i + 2j) - (-4k + j) = -2i + j + 4k \Rightarrow \vec{v} = (-2, 1, 4)$$

Por tanto, el plano π es de la forma $\pi \equiv -2x + y + 4z + D = 0$ e imponiendo que pasa por el punto $P(0, 2, 2)$ obtenemos que $D = 10$, con lo que $\pi \equiv -2x + y + 4z - 10 = 0$.

Resolviendo el sistema $r \equiv \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2x + z = 0 \end{cases}$ obtenemos las ecuaciones paramétricas y la ecuación vectorial de la recta r. Es muy fácil deducir que, si llamamos $z = \lambda$, entonces $x = -\frac{1}{2}\lambda$, $y = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\lambda$, con lo que la ecuación vectorial de la recta r es:

$$r \equiv (x, y, z) = \left(0, -\frac{1}{2}, 0\right) + \lambda \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 1\right)$$

Obsérvese que de aquí también se puede deducir que un vector director de r es $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 1\right)$, y por tanto también lo será el vector $\vec{v} = (-2, 1, 4)$, por ser proporcional al anterior.

Si sustituimos las ecuaciones paramétricas de la recta r en la ecuación del plano tenemos:

$$-2\left(-\frac{1}{2}\lambda\right) + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\lambda\right) + 4\lambda - 10 = 0 \Rightarrow \frac{21}{4}\lambda - \frac{21}{2} = 0 \Rightarrow \lambda = 2$$

Por tanto, el punto Q es

$$Q\left(-\frac{1}{2} \cdot 2, -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot 2, 2\right) = Q(-1, 0, 2)$$

La recta s que se pide y que pasa por $P(0,2,2)$, se halla precisamente a partir de P y Q, pues $\overrightarrow{PQ} = (-1,-2,0)$, de donde

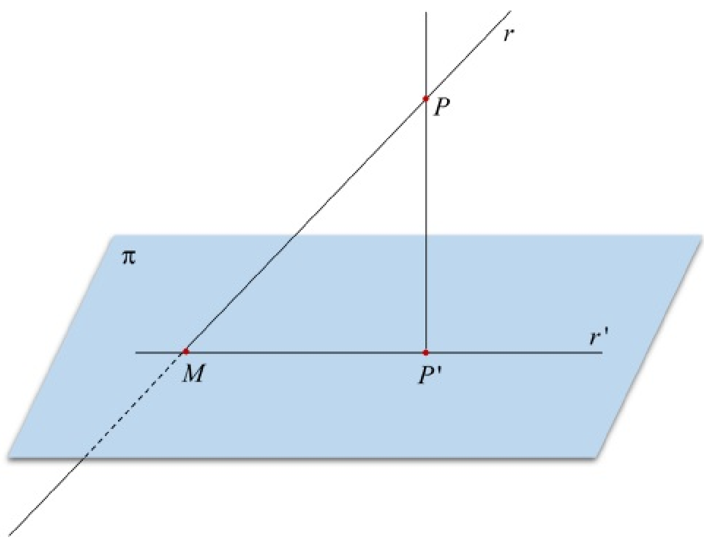
$$s \equiv \begin{cases} x = -\lambda \\ y = 2 - 2\lambda \\ z = 2 \end{cases}$$

Problema 3

Hallar la proyección r' de la recta $r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$ sobre el plano $\pi \equiv 2x - y + 3z + 6 = 0$.

Solución

La proyección P' de un punto P sobre el plano π (ver figura siguiente) es la intersección con el plano de la perpendicular a π trazada por el punto P. La recta r', proyección de la recta r sobre π, se obtiene hallando la proyección de dos puntos de r; uno de ellos es el punto de corte M (caso de que r y π sean secantes).



Las ecuaciones paramétricas de r son

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$$

Sustituyendo en la ecuación del plano resulta

$$2(2+\lambda) - (1+2\lambda) + 3(-\lambda) + 6 = 0 \Rightarrow -3\lambda + 9 = 0 \Rightarrow \lambda = 3$$

Llevando λ a las ecuaciones paramétricas de r se tiene que $M(5,7,-3)$. Otro punto de la recta es claramente $P(2,1,0)$. La ecuación de la recta que pasa por P y P', perpendicular a π, tiene por vector director el vector normal del plano, que es $\vec{v} = (2, -1, 3)$. Por tanto, las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por P y P' son las siguientes:

$$\begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 3\lambda \end{cases}$$

El punto P' de corte con el plano lo hallamos de nuevo sustituyendo en la ecuación del plano::

$$2(2 + 2\lambda) - (1 - \lambda) + 3 \cdot 3\lambda + 6 = 0 \Rightarrow 14\lambda + 9 = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{9}{14}$$

De aquí se obtiene que $P' = \left(\frac{10}{14}, \frac{23}{14}, -\frac{27}{14}\right)$. Un vector director de r' (proyección de r sobre π) es $\overrightarrow{MP'} = \left(-\frac{60}{14}, -\frac{75}{14}, \frac{15}{14}\right)$, con lo que también los será uno proporcional al anterior: $\vec{u} = (4, 5, -1)$. Por consiguiente, las ecuaciones paramétricas de r' son:

$$r' \equiv \begin{cases} x = 5 + 4\lambda \\ y = 7 + 5\lambda \\ z = -3 - \lambda \end{cases}$$

Problema 4

Hallar dos puntos, uno de cada una de las rectas

$$r \equiv \frac{x+2}{-5} = \frac{y-2}{4} = \frac{z+5}{-3} \; ; \; s \equiv \begin{cases} x = -\lambda \\ y = 3 + 2\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

de manera que la distancia entre ellos sea mínima. Calcula dicha distancia.

Solución

Tenemos las siguientes posibilidades.

1. r y s se cortan en un punto. Entonces la distancia es cero y los puntos buscados coinciden: el punto de corte.

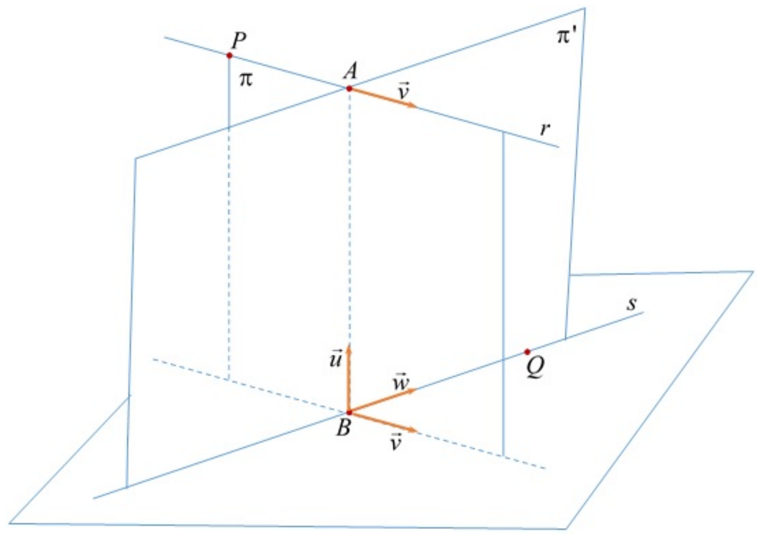
2. r y s son paralelas (si son coincidentes cualquier punto es solución). En este caso hay infinitas soluciones (para cada punto A de r consideramos la recta perpendicular a r, y por tanto perpendicular a s, que pasa por A. Esta recta cortará a s en un punto B. Los puntos A y B son la solución al problema).

3. r y s se cruzan. Entonces la solución es única y los puntos buscados son los puntos de intersección de la perpendicular común a r y a s con dichas rectas.

Sean $P(-2,2,-5)$ y $\vec{v}=(-5,4,3)$ un punto y un vector director de r; y sean $Q(0,3,1)$ y $\vec{w}=(-1,2,1)$ un punto y un vector director de s. La posición relativa de r y s se puede obtener calculando los rangos de las matrices formadas por $\vec{v}$ y $\vec{w}$ por un lado, y por $\vec{v}$, $\vec{w}$ y $\overrightarrow{PQ}$, por otro. Es muy fácil comprobar que

$$r\begin{pmatrix}\vec{v}\\ \vec{w}\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}-5 & 4 & -3\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}=2\,;\; r\begin{pmatrix}\vec{v}\\ \vec{w}\\ \overrightarrow{PQ}\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}-5 & 4 & -3\\ -1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 6\end{pmatrix}=3$$

Por tanto las rectas r y s se cruzan.



El vector perpendicular a ambas rectas es

$$\vec{u}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ -5 & 4 & -3\\ -1 & 2 & 1\end{vmatrix}=(4i+3j-10k)-(-4k-5j-6i)=10i+8j-6k\Rightarrow\vec{u}=(10,8,-6)$$

Sea π el plano determinado por r y $\vec{u}$:

$$\pi\equiv\begin{cases} x=-2-5\lambda+10\mu\\ y=2+4\lambda+8\mu\\ z=-5-3\lambda-6\mu\end{cases}$$

Pasemos a la ecuación general:

$$\begin{vmatrix} x+2 & -5 & 10\\ y-2 & 4 & 8\\ z+5 & -3 & -6\end{vmatrix}=(-24x-48-40z-200-30y+60)-(40z+200+30y-60-24x-48)=$$

$$= -60y - 80z - 280 \Rightarrow \pi \equiv 3y + 4z + 14 = 0$$

Para hallar B basta sustituir las ecuaciones paramétricas de s:

$$3(3+2\lambda) + 4(1+\lambda) + 14 = 0 \Rightarrow 10\lambda + 27 = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{27}{10}$$

de donde

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -\left(-\frac{27}{10}\right) = \frac{27}{10} \\ y = 3 + 2 \cdot \left(-\frac{27}{10}\right) = -\frac{24}{10} \\ z = 1 + \left(-\frac{27}{10}\right) = -\frac{17}{10} \end{array} \right. \Rightarrow B = \left(\frac{27}{10}, -\frac{24}{10}, -\frac{17}{10}\right)$$

Análogamente se halla el plano π' determinado por s y $\vec{u}$, y su intersección con la recta r, que es el punto

$$A\left(\frac{31}{10}, -\frac{52}{25}, -\frac{97}{50}\right)$$

La distancia es

$$d(A,B) = \sqrt{\left(\frac{27}{10} - \frac{31}{10}\right)^2 + \left(-\frac{24}{10} + \frac{52}{25}\right)^2 + \left(-\frac{17}{10} + \frac{97}{50}\right)^2} \cong 0,5656$$

Problema 5

Determinar los valores de a y b para que los planos

$$\begin{array}{l} \pi_1 \equiv x + 2y - z = 1 \\ \pi_2 \equiv 2x + y + az = 0 \\ \pi_3 \equiv 3x + 3y - 2z = b \end{array}$$

pasen por una misma recta. Hallar el simétrico del punto $(0,0,0)$ respecto a la recta común anterior.

Solución

Sean A y $A|b$ la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada del sistema formado por los tres planos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & a \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix} \ ; \ A|b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & a & 0 \\ 3 & 3 & -2 & b \end{pmatrix}$$

Para que los tres planos se corten según una recta, el sistema formado por las tres ecuaciones debe ser compatible indeterminado y para ello tanto el rango de A como el rango de $A|b$ deben de ser igual a dos.

Por un lado, el determinante de la matriz de los coeficientes ha de ser igual a cero:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & a \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix} = (-2 + 6a - 6) - (-3 - 8 + 3a) \Rightarrow 3a + 3 = 0 \Rightarrow a = -1$$

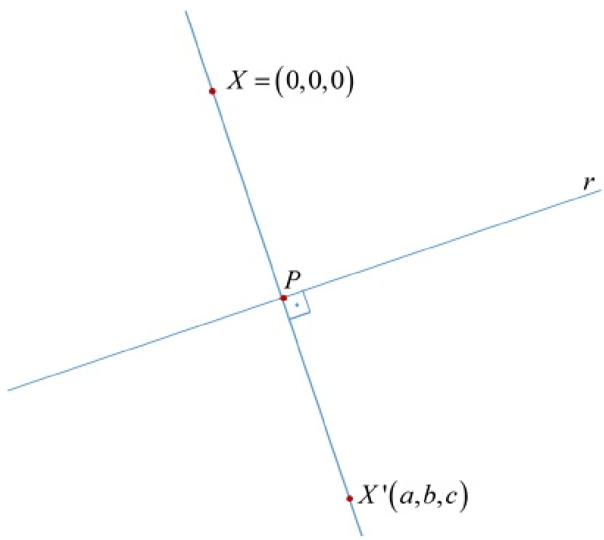
Además, como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, se tiene que para $a = -1$, el rango de A es dos. Para que la matriz ampliada sea también de rango dos bastará que sea nulo el determinante que se obtiene de suprimir la tercera columna:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & b \end{vmatrix} = (b+6) - (3+4b) \Rightarrow -3b+3 = 0 \Rightarrow b = 1$$

Así pues, si $a = -1$ y $b = 1$, los planos se cortan en una misma recta r de ecuación general

$$r \equiv \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$$

Hemos suprimido la tercera ecuación que, para $a = -1$ y $b = 1$, es combinación lineal de las dos primeras (de hecho, es la suma de ambas).



Sea $X = (0,0,0)$, y $X'(a,b,c)$ el simétrico de X respecto de la recta r. Entonces $\overrightarrow{XX'} = (a,b,c)$ debe ser perpendicular al vector director de r. Además, un punto de r es el punto medio de X y X': $P\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right)$.
Un vector director de r es:

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-2i - 2j + k) - (4k - j - i) = -i - j - 3k \Rightarrow \vec{u} = (-1,-1,-3)$$

Como, según se ha dicho, $\overrightarrow{XX'} \perp \vec{u}$, entonces:

$$\overrightarrow{XX'} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow -a - b - 3c = 0 \Rightarrow a + b + 3c = 0$$

Por otra parte, P debe satisfacer las ecuaciones de r:

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{a}{2}+2\frac{b}{2}-\frac{c}{2}=1\\ 2\frac{a}{2}+\frac{b}{2}-\frac{c}{2}=0\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}a+2b-c=2\\ 2a+b-c=0\end{array}\right.$$

Finalmente $X'=(a,b,c)$ se halla resolviendo el sistema

$$\left\{\begin{array}{l}a+b+3c=0\\ a+2b-c=2\\ 2a+b-c=0\end{array}\right.$$

cuyas soluciones son $a=-\frac{8}{11}$, $b=\frac{14}{11}$ y $c=-\frac{2}{11}$. Entonces $X'=\left(-\frac{8}{11},\frac{14}{11},-\frac{2}{11}\right)$.