Más sobre límites de sucesiones
Sucesiones parciales. Sucesiones monótonas.

En un artículo anterior habíamos hablado de las sucesiones de números reales y del concepto de límite de una sucesión. También, en otro artículo, estuvimos viendo el concepto de sucesión acotada y algunas propiedades de las sucesiones convergentes.

En este artículo vamos a completar nuestro estudio de las sucesiones. Diremos lo que es una sucesión parcial de una sucesión, definiremos las sucesiones monótonas y veremos su relación con el concepto de convergencia de una sucesión.

Sucesiones parciales

Para definir con rigor cuándo una sucesión es sucesión parcial de otra dada es necesario utilizar el concepto de aplicación estrictamente creciente. Así, se dice que una aplicación $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ es *estrictamente creciente* si verifica que

$$\sigma(n) < \sigma(n+1)\,, \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Es inmediato comprobar que $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ es estrictamente creciente si y sólo si

$$n, m \in \mathbb{N}, n < m \Rightarrow \sigma(n) < \sigma(m)$$

Definición 1.
Dadas dos sucesiones de números reales $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$, se dice que $\{y_n\}$ es una *sucesión parcial* de $\{x_n\}$ cuando existe una aplicación $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ estrictamente creciente tal que

$$y_n = x_{\sigma(n)}\,, \forall\, n \in \mathbb{N}$$

A título de ejemplo, la sucesión $\{1\}$ (constantemente igual a 1) es una sucesión parcial de la sucesión $\{(-1)^n\}$ (tómese $\sigma(n) = 2n$). En general las sucesiones parciales de una sucesión $\{x_n\}$ son de la forma $\{x_{\sigma(n)}\}$ en que σ es una aplicación estrictamente creciente de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$. Así, $\{x_{2n}\}$, $\{x_{2n-1}\}$, $\{x_{n^2}\}$ son sucesiones parciales de $\{x_n\}$. A veces a una sucesión parcial de una sucesión $\{x_n\}$ también se la llama *subsucesión* de la sucesión $\{x_n\}$, la cual a menudo se suele escribir $\{x_{n_k}\}$, en vez de $\{x_{\sigma(n)}\}$. Obsérvese que, en el fondo, es lo mismo asignar a un número natural k el número $\sigma(k)$ que el número n_k: son dos formas equivalentes de expresar la misma idea.

Es inmediato comprobar las siguientes afirmaciones:

- Toda sucesión es una sucesión parcial de sí misma.
- Si $\{y_n\}$ es una sucesión parcial de $\{x_n\}$ y $\{z_n\}$ es una sucesión parcial de $\{y_n\}$, entonces $\{z_n\}$ es una sucesión parcial de $\{x_n\}$. (Piénsese que la composición de dos aplicaciones estrictamente crecientes de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ es a su vez estrictamente creciente).

Hay algo que os parecerá obvio: que una sucesión parcial de una sucesión convergente también es convergente y tiene el mismo límite. Pero esto hay que demostrarlo. Para hacerlo demostraremos previamente un lema.

Lema 1.
Sea σ una aplicación de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ estrictamente creciente. Entonces $\sigma(n) \geqslant n\,, \forall\, n \in \mathbb{N}$.
Demostración.
Obviamente $\sigma(1) \geqslant 1$. Supuesto que $\sigma(n) \geqslant n$, luego $\sigma(n+1) > \sigma(n) \geqslant n$ y por tanto se tiene $\sigma(n+1) \geqslant n+1$, lo que demuestra el lema por inducción.
En la demostración de este lema se ha hecho uso de que si m y n son naturales verificando $n < m$, entonces $n+1 \leqslant m$, propiedad demostrada en el artículo "El conjunto de los números naturales: una definición rigurosa y algunas propiedades".

Proposición.
Toda sucesión parcial de una sucesión de números reales convergente es convergente y tiene el mismo límite.
Demostración.
Sea $\{x_n\} \to x$, sea $\{y_n\}$ cualquier sucesión parcial de $\{x_n\}$ y sea $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ estrictamente creciente tal que $y_n = x_{\sigma(n)}\,, \forall\, n \in \mathbb{N}$. Dado $\varepsilon > 0$, por ser $\{x_n\} \to x$ tenemos

$$\exists\, m \in \mathbb{N} \,:\, n \geqslant m \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon$$

Entonces, si $n \geqslant m$ tenemos, por el lema anterior, $\sigma(n) \geqslant n \geqslant m$ y por tanto

$$|y_n - x| = |x_{\sigma(n)} - x| < \epsilon$$

lo que prueba que $\{y_n\} \to x$ como queríamos demostrar.

Obsérvese que si $\{x_n\}$ es una sucesión convergente de números reales, el hecho de que una sucesión parcial suya, $\{x_{\sigma(n)}\}$, converja se expresa de la siguiente forma:

$$\forall\, \varepsilon > 0\,,\ \exists\, m \in \mathbb{N} \,:\, n \geqslant m \Rightarrow |x_{\sigma(n)} - x| < \varepsilon$$

Corolario.
Si una sucesión de números reales admite dos sucesiones parciales convergentes a límites distintos, dicha sucesión no es convergente.

El corolario anterior (cuya demostración es inmediata) es útil a la hora de probar que una sucesión no es convergente. Por ejemplo, la sucesión $\{x_n\} = \{(-1)^n\}$ no es convergente porque admite dos sucesiones parciales convergentes a límites distintos: por un lado, la sucesión parcial $\{x_{2n}\} = \{(-1)^{2n}\} = \{1\} \to 1$, y por otro, la parcial $\{x_{2n-1}\} = \{(-1)^{2n-1}\} = \{-1\} \to -1$.

Enunciamos a continuación cuatro propiedades en las que aparecen sucesiones parciales cuya demostración se deja como ejercicio para el lector.

1. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales tal que $n \neq m \Rightarrow x_n \neq x_m$, y sean p y q dos números naturales. Probar que $\{x_{pn}\}$ es una sucesión parcial de $\{x_{qn}\}$ si y sólo si p es múltiplo de q.
   Solución.
   Observemos en primer lugar que $\{x_{pn}\}$ y $\{x_{qn}\}$ son sucesiones parciales de $\{x_n\}$. Es decir, existen aplicaciones estrictamente crecientes $\sigma_1, \sigma_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definidas por $\sigma_1(n) = pn$, $\sigma_2(n) = qn$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, tales que $\{x_{pn}\} = \{x_{\sigma_1(n)}\}$ y $\{x_{qn}\} = \{x_{\sigma_2(n)}\}$.
   $\Rightarrow$) Si suponemos que $\{x_{pn}\}$ es una sucesión parcial de $\{x_{qn}\}$ es porque existe una aplicación estrictamente creciente $\sigma : \operatorname{Im}\sigma_2 \to \mathbb{N}$, definida por $\sigma(\sigma_2(n)) = \sigma(qn) = pn$. Pero $\sigma(qn)$ es natural, luego ha de existir $k \in \mathbb{N}$ tal que $\sigma(qn) = kqn = pn$, con lo que $kq = p$ y p es múltiplo de q.
   $\Leftarrow$) Si p es múltiplo de q, $\exists\, k \in \mathbb{N}$ tal que $p = kq$, con lo que $pn = kqn\,, \forall\, n \in \mathbb{N}$, es decir, $\sigma_1(n) = k\sigma_2(n)\,, \forall\, n \in \mathbb{N}$. Sea $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $\sigma(n) = kn\,, \forall\, n \in \mathbb{N}$. σ es con claridad estrictamente creciente y además $\sigma_1(n) = \sigma(\sigma_2(n))$, con lo que $\{x_{pn}\} = \{x_{\sigma_1(n)}\}$ es una parcial de $\{x_{qn}\} = \{x_{\sigma_2(n)}\}$.

2. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales y x un número real. Probar que si $\{x_{2n}\} \to x$ y $\{x_{2n+1}\} \to x$, entonces $\{x_n\} \to x$. Inténtese dar un enunciado más general de este tipo.
   Solución.
   Como $\{x_{2n}\} \to x$ tenemos que $\forall\, \varepsilon > 0\,, \exists\, p \in \mathbb{N} \,:\, 2n \leqslant p \Rightarrow |x_{2n} - x| < \varepsilon$. De igual modo, como $\{x_{2n+1}\} \to x$, $\forall\, \varepsilon > 0\,, \exists\, q \in \mathbb{N} \,:\, 2n + 1 \leqslant q \Rightarrow |x_{2n-1} - x| < \varepsilon$.
   Sea $\varepsilon > 0$. Si n es par, $\exists\, k \in \mathbb{N} \,:\, n = 2k \Rightarrow |x_n - x| = |x_{2k} - x| < \varepsilon$, siempre que $n \leqslant p$. Ahora bien, si n es impar, $\exists\, r \in \mathbb{N} \,:\, n = 2r + 1 \Rightarrow |x_n - x| = |x_{2r+1} - x| < \varepsilon$. Tomando $m = \text{máx}\{p, q\}$ se tiene que si $n \geqslant m \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon$ y, por tanto, $\{x_n\} \to x$.
   El enunciado general es que si $\{x_{\sigma_i(n)}\}_{i=1,\ldots,p}$, es una colección de parciales convergentes a

un número real x y además $\bigcup_{i=1}^{p} \mathrm{Im}\sigma_i = \mathbb{N}$, entonces $\{x_n\} \to x$.

3. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales, p un número natural, y definamos una sucesión de números reales $\{z_n\}$ en la forma $z_n = x_{n+p} \, \forall \, n \in \mathbb{N}$ ($\{z_n\} = \{x_{n+p}\}$; nótese que $\{z_n\}$ es una sucesión parcial de $\{x_n\}$). Probar que $\{x_n\}$ es convergente si y sólo si los es $\{z_n\}$, en cuyo caso $\text{lím}\, x_n = \text{lím}\, z_n = \text{lím}\, x_{n+p}$.
   Solución.
   $\Rightarrow$) Toda sucesión parcial de una sucesión convergente es convergente y tiene el mismo límites. Por tanto, $\{z_n\}$ es convergente y $\text{lím}\, x_n = \text{lím}\, z_n = \text{lím}\, x_{n+p}$.
   $\Leftarrow$) Dado $\varepsilon > 0$, por ser $\{z_n\} \to x$, $\exists \, m_1 \in \mathbb{N} \, : \, n \geqslant m_1 \Rightarrow |z_n - x| = |x_{n+p} - x| < \varepsilon$. Sea $m = m_1 + p$. Si $n \geqslant m = m_1 + p \Rightarrow n - p \geqslant m_1$, y entonces $|z_{n-p} - x| = |x_n - x| < \varepsilon$. Por tanto, $\{x_n\}$ es convergente y $\{x_n\} \to x$.

4. Sea $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ dos sucesiones de números reales. Supongamos que existe un natural p tal que para $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant p$ se tiene $x_n = y_n$. Probar que $\{x_n\}$ es convergente si y solo si lo es $\{y_n\}$, en cuyo caso se tiene $\text{lím}\, x_n = \text{lím}\, y_n$. (El carácter de convergencia de una sucesión y su límite cuando exista, no se alteran si se modifica arbitrariamente un conjunto finito de términos de la sucesión).
   Solución.
   Si suponemos que $\{x_n\}$ es convergente, dado $\varepsilon > 0$, $\exists \, n_0 \in \mathbb{N} \, : \, n \geqslant n_0 \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon$. Tomemos ahora $m = \text{máx}\{p, n_0\}$. Si $n \geqslant m \Rightarrow |x_n - x| = |y_n - x| < \varepsilon$. Por tanto, $\{y_n\}$ es convergente y tiene el mismo límite que $\{x_n\}$. De igual forma, y por simetría, si $\{y_n\}$ es convergente también lo es $\{x_n\}$ y converge al mismo límite.

Sucesiones monótonas

Definición 2.
Diremos que una sucesión $\{x_n\}$ de números reales es *creciente* si $x_n \leqslant x_{n+1}$ para todo natural n. Diremos que x_n es *decreciente* si $x_n \geqslant x_{n+1}$ para todo natural n. Diremos que una sucesión de números reales el *monótona* si es creciente o decreciente.

Es fácil comprobar por inducción que si $\{x_n\}$ es una sucesión de números reales creciente (respectivamente, decreciente), se tiene:

$$n, m \in \mathbb{N} \, , \, n \leqslant m \Rightarrow x_n \leqslant x_m \text{ (respectivamente, } x_n \geqslant x_m\text{)}$$

Es conveniente hacer notar que existen sucesiones que son a la vez crecientes o decrecientes (a saber, las constantes) y que existen sucesiones que no son crecientes ni decreciente, es decir, que no son monótonas (por ejemplo la sucesión $\{(-1)^n\}$).

Sabemos que toda toda sucesión de números reales convergente es acotada (ver la Proposición 1 del artículo "Sucesiones acotadas. Propiedades de las sucesiones convergentes"). Sin embargo, el recíproco no es cierto en general (tómese como ejemplo, otra vez, la sucesión $\{(-1)^n\}$). A continuación probaremos que el recíproco sí que es cierto para sucesiones monótonas. La demostración de este importante resultado vuelve a hacer uso del axioma del supremo.

Teorema 1.
Toda sucesión de números reales monótona y acotada es convergente.
Demostración.
Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales creciente y mayorada; sea $x = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Dado $\varepsilon > 0$, $x - \varepsilon$ no puede ser un mayorante del conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ y por tanto existe un número natural m tal que $x - \varepsilon < x_m$. Entonces, para $n \geqslant m$ tenemos

$$x - \varepsilon < x_m \leqslant x_n \leqslant x < x + \varepsilon$$

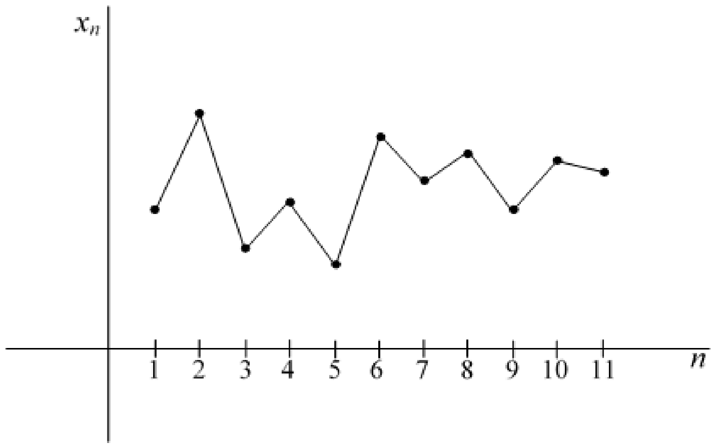
de donde $|x_n - x| < \varepsilon$. Esto demuestra que $\{x_n\}$ es convergente y hemos obtenido además que $\lim x_n = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Si $\{x_n\}$ es decreciente y minorada, entonces $\{-x_n\}$ es creciente y mayorada (¿sabrías explicar por qué?), luego convergente, con lo que $\{x_n\}$ es convergente y se tiene además

$$\lim x_n = -\lim(-x_n) = -\sup\{-x_n : n \in \mathbb{N}\} = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$$

La importancia del resultado anterior radica en que se usa en la demostración del siguiente teorema, el teorema de Bolzano-Weierstrass, según el cual toda sucesión de números reales acotada admite una sucesión parcial convergente. En dicha demostración también se usa otro resultado, que enunciaremos en forma de lema.

Lema 2.
Toda sucesión de números reales admite una sucesión parcial monótona.
Demostración.
Esta demostración hace uso de un concepto muy especial que nos ayudará a construir la sucesión parcial que se afirma en el enunciado del lema. Llamemos "punto cumbre" de una sucesión $\{x_n\}$ a un número natural n tal que $x_m < x_n$ para todo $m > n$. Para hacerse una idea de lo que es un punto cumbre podemos observar la siguiente figura donde se ha representando una sucesión con once términos y en la que 2 y 6 son puntos cumbre.



Ahora distinguiremos dos casos.

Caso 1. La sucesión tiene infinitos puntos cumbre. En este caso, si $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ son los puntos cumbre, entonces $x_{n_1} > x_{n_2} > x_{n_3} > \dots$, de modo que $\{x_{n_k}\}$ es la sucesión parcial (decreciente) deseada.

Caso 2. La sucesión tiene solamente un número finito de puntos cumbre. En este caso, sea n_1 mayor que todos los puntos cumbre. Puesto que n_1 no es punto cumbre, existe algún $n_2 > n_1$ tal que $x_{n_2} \geqslant x_{n_1}$. Puesto que n_2 no es punto cumbre (es mayor que n_1, y por lo tanto mayor que todos los puntos cumbre) existe algún $n_3 > n_2$ tal que $x_{n_3} \geqslant a_{x_2}$. Continuando de esta forma obtenemos la sucesión parcial $\{x_{n_k}\}$ deseada (en este caso creciente).

Teorema 2 (Bolzano-Weierstrass).
Toda sucesión de números reales acotada admite una sucesión parcial convergente.
Demostración.
Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales acotada, sea $\{x_{\sigma(n)}\}$ una sucesión parcial de $\{x_n\}$ monótona, que existe por el lema anterior. Como $\{x_{\sigma(n)}\}$ está también acotada el ***Teorema 1*** nos asegura que $\{x_{\sigma(n)}\}$ es convergente.

Proponemos a continuación una pequeña colección de ejercicios. Intentar hacerlos usando todo lo que hasta ahora se conoce sobre las sucesiones es una tarea fundamental para alguien que quiera acercarse a las matemáticas superiores sin temor de perderse nada posterior.

1. Probar que toda sucesión de números reales monótona, que admita una sucesión parcial convergente, es convergente.
   Solución.
   Sea $\{x_n\}$ monótona. Supongamos que es creciente: $x_n \leqslant x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$. Sea $\{x_{\sigma(n)}\}$ la parcial de $\{x_n\}$ convergente. Demostraremos que $\{x_n\}$ es convergente por reducción al ab-

surdo. Si $\{x_n\}$ no fuera convergente entonces, como es creciente, no estaría mayorada, es decir, $\forall\, M > 0\,, \exists\, m \in \mathbb{N} : x_m > M$. Puesto que $\sigma(n) \geqslant n\,, \forall\, n \in \mathbb{N}$, entonces $\sigma(m) \geqslant m$ y por ser $\{x_n\}$ creciente se tiene $x_{\sigma(m)} \geqslant x_m > M$, y esto sea quien sea $M \in \mathbb{R}^+$, lo que demuestra que $\{x_{\sigma(n)}\}$ no está mayorada. Esto contradice que $\{x_{\sigma(n)}\}$ sea convergente. Por tanto, la sucesión $\{x_n\}$ deber ser convergente.

2. Dar un ejemplo de una sucesión de números reales positivos, convergente a cero, que no sea monótona.
   Solución.
   Sea $\{x_n\}$ la sucesión de números reales definida de la siguiente forma:

$$x_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si} \quad n = 2k \\ \frac{2}{n} & \text{si} \quad n = 2k-1 \end{cases}$$

   donde k es un número natural. Es claro que $\{x_n\} \to 0$, pero $\{x_n\}$ no es monótona pues, por ejemplo, $x_1 = 2 > x_2 = \frac{1}{2}$ y $x_2 = \frac{1}{2} < x_3 = \frac{2}{3}$.

3. Dar un ejemplo de una sucesión de números reales, no acotada, que admita una sucesión parcial convergente.
   Solución.
   Sea la sucesión $\{x_n\}$ definida del siguiente modo:

$$x_n = \begin{cases} n & \text{si} \quad n = 2k \\ \frac{1}{n} & \text{si} \quad n = 2k-1 \end{cases}$$

   donde k es un número natural. $\{x_n\}$ no está mayorada pues dado un número real y positivo M cualquiera, sea $k = \mathrm{E}(M) + 1$ y $m = 2k$. Entonces

$$x_m = m = 2k = 2(\mathrm{E}(M) + 1) > 2M > M$$

   Pero la parcial dada por la aplicación $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $\sigma(n) = 2n - 1\,, \forall\, n \in \mathbb{N}$: $\{x_{\sigma(n)}\} = \{x_{2n-1}\} = \{\frac{1}{n}\}$, converge a cero.

4. Probar que si x es un número real con $|x| < 1$, entonces la sucesión $\{x^n\}$ converge a cero, mientras que si $|x| > 1$ dicha sucesión no está acotada.
   Solución.
   Supongamos en primer lugar que $|x| < 1$. Si $x = 0$, tenemos $\{x_n\} = \{0\} \to 0$. Si $0 < |x| < 1$ y $m, n \in \mathbb{N}$, $n < m \Leftrightarrow |x|^n > |x|^m$ y entonces $\{|x|^n\}$ es decreciente. Además, como $0 < |x|^n\,, \forall\, n \in \mathbb{N}$, $\{|x|^n\}$ está acotada inferiormente por cero. Así pues $\{|x|^n\}$ es convergente.

Sea $L = \text{lím}\,|x|^n$. Como $|x|^{n+1} = |x|^n \cdot |x|$, entonces $\text{lím}\,|x|^{n+1} = |x| \cdot \text{lím}\,|x|^n$, es decir, $L = |x|L \Rightarrow L(1-|x|) = 0$. Como $|x| < 1$, entonces $1 - |x| \neq 0$ con lo que $L = 0$. De este modo $\{|x|^n\} \to 0 \Rightarrow \{|x^n|\} \to 0$ y, por tanto, $\{x_n\} \to 0$.

Por otro lado, si $|x| > 1$, entonces $|\frac{1}{x}| < 1 \Rightarrow \{(\frac{1}{x})^n\} = \{\frac{1}{x^n}\} \to 0$. De aquí deducimos que $\{x^n\}$ no está acotada y, por tanto, tampoco es convergente.

5. Probar que si $|x| < 1$, entonces la sucesión $\{1 + x + x^2 + \cdots + x^n\}$ converge a $\dfrac{1}{1-x}$. (Utilícese que $(x-1)(1+x+x^2+\ldots+x^n) = x^{n+1} - 1$, para todo natural n).
Solución.
La igualdad $(x-1)(1+x+x^2+\ldots+x^n) = x^{n+1} - 1$, para todo natural n) se puede demostrar con facilidad por inducción. Utilizando esta igualdad se tiene

$$\text{lím}((x-1)(1+x+x^2+\ldots+x^n)) = \text{lím}(x^{n+1}-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{lím}(1+x+x^2+\ldots+x^n) = \frac{\text{lím}(x^{n+1}-1)}{x-1}$$

Como $|x| < 1$, entonces $\{x_n\} \to 0$ (ejercicio anterior) y por tanto,

$$\text{lím}(1+x+x^2+\ldots+x^n) = \frac{-1}{x-1} = \frac{1}{1-x}$$

tal y como queríamos demostrar.

6. Estudiar la convergencia de las siguientes sucesiones:

$$\left\{\frac{n}{2^n}\right\} \quad ; \quad \left\{\frac{2^n+n}{3^n-n}\right\}$$

Solución.
Estudiemos en primer lugar la convergencia de la sucesión $\{\frac{n}{2^n}\}$.

Observemos que, para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$n > 1 \Rightarrow 2n > n+1 \Rightarrow n > \frac{n+1}{2} \Rightarrow \frac{n}{2^n} > \frac{n+1}{2^{n+1}}$$

Lo anterior demuestra que la sucesión $\{\frac{n}{2^n}\}$ es decreciente.
Demostremos ahora por inducción que $2^n < 2^{n+1} - 1$. El resultado es cierto para $n = 1$ pues claramente $2 < 3$. Supongamos el resultado cierto para n y demostrémoslo para $n+1$:

$$2^{n+1} = 2^n \cdot 2 < (2^{n+1}-1) \cdot 2 =) 2^{n+2} - 2 < 2^{n+2} - 2 + 1 = 2^{n+2} - 1$$

Por el principio de inducción $2^n < 2^{n+1} - 1\,, \forall\, n \in \mathbb{N}$.
Demostremos ahora, también por inducción, que $n < 2^n$. Claramente el resultado es cierto para $n = 1$, pues $1 < 2$. Supongamos el resultado cierto para n y demostrémoslo para $n + 1$:

$$n + 1 < 2^n + 1 < 2^{n+1} - 1 + 1 = 2^{n+1}$$

donde se ha usado la desigualdad demostrada anteriormente. Por el principio de inducción $n < 2^n\,, \forall\, n \in \mathbb{N}$. Entonces $0 < \frac{n}{2^n} < 1\,, \forall\, n \in \mathbb{N}$, lo que demuestra que la sucesión $\{\frac{n}{2^n}\}$ está acotada.
Hemos demostrado que la sucesión $\{\frac{n}{2^n}\}$ es decreciente y acotada (en particular minorada por cero). Además, $\inf\{\frac{n}{2^n} : n \in \mathbb{N}\} = 0$, lo que demuestra que $\{\frac{n}{2^n}\} \to 0$.

Estudiemos ahora la convergencia de la sucesión $\{\frac{2^n+n}{3^n-n}\}$.

Descompongamos la sucesión en suma de otras dos: $\{\frac{2^n+n}{3^n-n}\} = \{\frac{2^n}{3^n-n}\} + \{\frac{n}{3^n-n}\}$. Ambas están acotadas inferiormente por cero pues es fácilmente demostrable por inducción que $3^n > n$. Demostraremos ahora que ambas son decrecientes.
Es claro que, dado $n \in \mathbb{N}$, $1 < 3^n + n$. Entonces:

$$0 < 3^n + n - 1 \Rightarrow 2 \cdot 3^n - 2n < 3 \cdot 3^n - n - 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2^{n+1}(3^n - n) < 2^n(3^{n+1} - n - 1) \Rightarrow \frac{2^{n+1}}{3^{n+1} - (n+1)} < \frac{2^n}{3^n - n}$$

Esto ocurre $\forall\, n \in \mathbb{N}$, lo que demuestra que la sucesión $\{\frac{2^n}{3^n-n}\}$ es decreciente.

Por otro lado, es claro que, sea quien sea el número natural n, $n + 1 < 3n$. Entonces:

$$3^n(n+1) < 3^n \cdot 3n \Rightarrow 3^n n + 3^n < 3^{n+1} n \Rightarrow 3^n n + 3^n - n^2 - n < 3^{n+1} n - n^2 - n \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (3^n - n)(n+1) < n(3^n + 1 - n - 1) \Rightarrow \frac{n+1}{3^{n+1} - (n+1)} < \frac{n}{3^n - n}$$

Como lo anterior ocurre $\forall\, n \in \mathbb{N}$, hemos demostrado que la sucesión $\{\frac{n}{3^n-n}\}$ es decreciente.

Por tanto, la sucesión $\frac{2^n+n}{3^n-n}$ es una sucesión decreciente de números reales positivos acotada inferiormente por cero, con lo que $\{\frac{2^n+n}{3^n-n}\} \to 0$.

Podríamos haber demostrado que $\{\frac{2^n+n}{3^n-n}\} \to 0$ también del siguiente modo:

$$\left\{\frac{2^n + n}{3^n - n}\right\} = \left\{\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{n}{3^n}}{1 - \frac{n}{3^n}}\right\}$$

Esta última sucesión converge a cero porque $\{\frac{n}{3^n}\} \to 0$ (resultado que se puede demostrar prácticamente igual a como se demostró en el punto anterior que $\{\frac{n}{2^n}\} \to 0$), y porque también $\{(\frac{2}{3})^n\} \to 0$, pues $0 < \frac{2}{3} < 1$.

7. Sea a un número real y positivo y definamos

$$x_1 = a \quad ; \quad x_{n+1} = \frac{x_n}{1+x_n}\,,\forall\, n \in \mathbb{N}$$

Probar que la sucesión $\{x_n\}$ converge a cero.
Solución.
Veamos en primer lugar que $\{x_n\}$ es creciente. Por un lado tenemos:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{x_n}{1+x_n} = \frac{x_n - x_n - x_n^2}{1+x_n} = \frac{-x_n^2}{1+x_n}$$

Probemos ahora por inducción que $x_n \geqslant 0\,,\forall\, n \in \mathbb{N}$. $x_1 = a \geqslant 0$, pues a es un número real positivo. Sea el resultado cierto para n y demostrémoslo para $n+1$: $x_{n+1} = \frac{x_n}{1+x_n} \geqslant 0$, pues por hipótesis de inducción $x_n \geqslant 0$. Así, al ser $x_n \geqslant 0\,,\forall\, n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\frac{-x_n^2}{1+x_n} \leqslant 0\,,\forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow x_{n+1} - x_n \leqslant 0\,,\forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow x_{n+1} \leqslant x_n\,,\forall\, n \in \mathbb{N}$$

Lo anterior demuestra que x_n es decreciente. Además, como $\{x_n\}$ está acotada inferiormente por cero, $\{x_n\}$ es convergente. Calculemos su límite. Supongamos que $x_n \to x$. Entonces:

$$\{x_{n+1}\} = \left\{\frac{x_n}{1+x_n}\right\} \Rightarrow x = \frac{x}{1+x} \Rightarrow x + x^2 = x \Rightarrow x = 0$$

8. Sea a un número real positivo y consideremos la sucesión $\{x_n\}$ definida por:

$$x_1 = a \quad ; \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)\,,\forall\, n \in \mathbb{N}$$

Pruébese que $\{x_n\}$ es convergente y que su límite, x, verifica que $x^2 = a$. (Se prueba así que todo número real positivo tiene una "raíz cuadrada" positiva).
Solución.
Probemos por inducción que $x_n > 0\,,\forall\, n \in \mathbb{N}$. Por hipótesis, $x_1 = a > 0$. Supongamos que $x_n > 0$. Entonces claramente $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) > 0$. Esto demuestra que $\{x_n\}$ está acotada inferiormente por cero.

Veamos también por inducción que es decreciente. Probemos que $x_n \geqslant a\,,\forall\, n \in \mathbb{N}$. Para $n = 1$ es cierto si, y solo si, $a \geqslant 1$ pues $x_1^2 = a^2 \geqslant a$. Caso de que $a < 1$ decrecerá a partir del segundo término. Vamos a comprobarlo. Supongamos el resultado cierto para n y demostrémoslo para $n+1$:

$$a - x_{n+1}^2 = a - \frac{1}{4}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)^2 = a - \frac{1}{4}\left(x_n^2 + \frac{a^2}{x_n^2} + 2a\right) =$$

$$\frac{4ax_n^2 - x_n^4 - a^2 - 2ax_n^2}{4x_n^2} = \frac{2ax_n^2 - x_n^4 - a^2}{4x_n^2} = \frac{-(x_n^2 - a)^2}{4x_n^2} \leqslant 0$$

Entonces $a - x_{n+1}^2 \leqslant 0 \Rightarrow x_{n+1}^2 \geqslant a$ y, por tanto, queda demostrado que $x_n^2 \geqslant a\,,\forall\, n \in \mathbb{N}$. Así:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) - x_n = \frac{x_n^2 + a - 2x_n^2}{2x_n^2} = \frac{a - x_n^2}{2x_n^2} \leqslant 0$$

precisamente porque $x_n^2 \geqslant a\,,\forall\, n \in \mathbb{N}$. Esto demuestra que $x_{n+1} \leqslant x_n\,,\forall\, n \in \mathbb{N}$, con lo que $\{x_n\}$ es decreciente.

Hemos demostrado que $\{x_n\}$ está acotada inferiormente por cero y que es decreciente. Por tanto, $\{x_n\}$ es convergente. Calculemos su límite. Supongamos que $\{x_n\} \to x$. Entonces, como $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$, se tiene que

$$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) \Rightarrow 2x^2 = x^2 + a \Rightarrow x^2 = a \Rightarrow x = \sqrt{a}$$

En un próximo artículo, para finalizar todo lo relacionado con las sucesiones de números reales, hablaremos sobre las sucesiones de Cauchy y enunciaremos el teorema de complitud de $\mathbb{R}$.