Sistemas de ecuaciones lineales dependientes de un parámetro

Vamos a hacer uso del Teorema de Rouché-Frobenius para resolver sistemas de ecuaciones lineales de primer grado. En particular, dedicaremos este artículo a resolver sistemas de ecuaciones lineales que dependan de un parámetro. Recordemos pues, en primer lugar, el enunciado del Teorema de Rouché-Frobenius.

Teorema de Rouché-Frobenius

Sea

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ \ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ \ldots\ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ \ldots\ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas y sean también

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ \ldots\ldots & a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{m1} & a_{m2} \ \ldots\ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad ; \quad A|b = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ \ldots\ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} \ \ldots\ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} \ \ldots\ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada, respectivamente, asociadas al sistema. Llamemos $r(A)$ al rango de la matriz A y $r(A|b)$ al rango de la matriz ampliada. Entonces:

1. Si $r(A) \neq r(A|b)$ el sistema es incompatible (no tiene solución).
2. Si $r(A) = r(A|b)$ el sistema es compatible. Además:
   - Si $r(A) = r(A|b) = n$, el sistema es compatible determinado (solución única).
   - Si $r(A) = r(A|b) < n$, el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones). En este caso, llamando r al rango, se pueden expresar r incógnitas en función de las $n - r$ restantes. Al número $n - r$ se le llama *grado de libertad* del sistema.

Ejemplo 1

En el sistema

$$\begin{cases} 3x + 2y + 5z - t = 2 \\ 2x - y - z + t = 3 \\ x + y + 3z - 2t = 4 \end{cases}$$

tenemos que

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \quad ; \quad A|b=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Ya vimos en otro artículo cómo calcular el rango de una matriz usando los determinantes. En este caso, tanto el rango de la matriz de los coeficientes, como el rango de la matriz ampliada, es al menos tres. Pero es que hay por lo menos un menor de orden tres distinto de cero:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (-9-2+10)-(-5+12-3) = -1-4 = -5 \neq 0$$

Por tanto $r = r(A) = r(A|b) = 3 < 4 = n$, con lo que, aplicando el Teorema de Rouché-Frobenius, el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones). Como su grado de libertad es $n-r = 4-3 = 1$, entonces tres de las incógnitas se expresarán en función de una restante. Usando el menor distinto de cero que hemos escogido anteriormente (formado por las tres primeras columnas), tomaremos como incógnita libre la última, que pasaremos al segundo miembro, y aplicaremos la regla de Cramer. Es decir, si llamamos $t=\lambda$, el sistema se puede escribir así:

$$\begin{cases} 3x+2y+5z = 2+\lambda \\ 2x-y-z = 3-\lambda \\ x+y+3z = 4+2\lambda \end{cases}$$

cuyas soluciones son:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2+\lambda & 2 & 5 \\ 3-\lambda & -1 & -1 \\ 4+2\lambda & 1 & 3 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{5+5\lambda}{-5} = -1-\lambda$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2+\lambda & 5 \\ 2 & 3-\lambda & -1 \\ 1 & 4+2\lambda & 3 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{50+15\lambda}{-5} = -10-3\lambda$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2+\lambda \\ 2 & -1 & 3-\lambda \\ 1 & 1 & 4+2\lambda \end{vmatrix}}{-5} = \frac{-25-10\lambda}{-5} = 5+2\lambda$$

Ejemplo 2

Dado el sistema

$$\begin{cases} 2x+y-z=4 \\ x-y+2z=1 \\ x+2y+z=0 \\ x+2y+5z=-3 \end{cases}$$

tenemos que la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada son las siguientes:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad ; \quad A|b=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

En este caso $r(A)=3$, ya que hay un menor de orden tres distinto de cero:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-2+2-2)-(1+1+8)=-2-10=-12\neq 0$$

Y también $r(A|b)=3$, pues el único menor de orden cuatro (el menor principal de orden cuatro) es igual a cero:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & -3 \end{vmatrix} = \begin{matrix} f_1-2f_2 \\ f_2-f_3 \\ \\ f_4-f_3 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -5 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

Obsérvese las transformaciones que se han hecho para hallar el determinante. Primero hemos hecho ceros teniendo en cuenta las propiedades de los determinantes (se pueden hacer de muchas otras formas distintas) y luego hemos desarrollado por los elementos de la primera columna. El último determinante (el de orden tres) es igual a cero porque la última fila es igual a la opuesta de la primera menos la segunda (aunque también se puede calcular aplicando la regla de Sarrus).

Por tanto $r(A)=r(A|b)=3=n$, con lo que el sistema es compatible determinado (solución única). Para resolverlo podemos eliminar la última ecuación pues, por ser $r(A|b)=3$, dependerá linealmente de las demás. Las soluciones son:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{-12}=\frac{(-4-2)-(1+16)}{-12}=\frac{-6-17}{-12}=\frac{23}{12}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-12}=\frac{(2+8)-(-1+4)}{-12}=\frac{10-3}{-12}=-\frac{7}{12}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{-12}=\frac{(1+8)-(-4+4)}{-12}=\frac{9-0}{-12}=-\frac{9}{12}=-\frac{3}{4}$$

Sistemas que dependen de un parámetro

Es corriente que, dado un sistema de ecuaciones lineales, alguno o algunos de los coeficientes o de los términos independientes sean desconocidos y dependan de uno o más parámetros. Discutir un sistema de ecuaciones dependiente de uno o más parámetros es identificar para qué valores de los parámetros el sistema es compatible, distinguiendo los casos en que es determinado o indeterminado.

Es posible discutir sistemas de ecuaciones lineales utilizando el método de Gauss. Aquí veremos cómo hacerlo con la ayuda de los determinantes. Como mejor se entiende es viendo algunos ejemplos.

Ejemplo 3

Discutiremos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} ax+y+z=2a \\ x-y+z=a-1 \\ x+(a-1)y+az=a+3 \end{cases}$$

según los valores del parámetro $a\in\mathbb{R}$.

La matriz de los coeficientes y la matriz ampliada son, respectivamente:

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & a-1 & a \end{pmatrix} \quad ; \quad A|b=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 2a \\ 1 & -1 & 1 & a-1 \\ 1 & a-1 & a & a+3 \end{pmatrix}$$

El rango de ambas es al menos dos pues hay un menor de orden dos distinto de cero:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=1-(-1)=2$$

Además

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & a-1 & a \end{vmatrix} = (-a^2+1+a-1) - (-1+a+a^2-a) =$$

$$= (-a^2+a) - (a^2-1) = -2a^2+a+1$$

Entonces $|A| = 0 \Leftrightarrow -2a^2+a+1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ a = 1 \end{cases}$.

Veamos ahora las distintas opciones que se pueden presentar.

Si $a \neq -\frac{1}{2}$ y $a \neq 1$, $|A| \neq 0$ y entonces $r(A) = r(A|b) = 3 = n$, con lo que el sistema es compatible determinado (solución única).

Si $a = -\frac{1}{2}$, la matriz ampliada es

$$A|b = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -3/2 \\ 1 & -3/2 & -1/2 & 5/2 \end{pmatrix}$$

cuyo rango es tres, pues hay un menor de orden tres distinto de cero:

$$\begin{vmatrix} -1/2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -3/2 \\ 1 & -3/2 & 5/2 \end{vmatrix} = \left(\frac{5}{4} - \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\right) - \left(1 + \frac{5}{2} - \frac{9}{8}\right) = \frac{5}{4} - \frac{19}{8} = -\frac{9}{8} \neq 0$$

Por tanto, en este caso, $r(A) = 2 \neq r(A|b) = 3$, con lo que el sistema es incompatible.

Finalmente, si $a = 1$, la matriz ampliada es

$$A|b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

cuyo rango también es tres pues vuelve a haber un menor de orden tres distinto de cero:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = (-4+0+0) - (-2+4+0) = -4-2 = -6 \neq 0$$

Por tanto, otra vez $r(A) = 2 \neq r(A|b) = 3$, y el sistema vuelve a ser incompatible.

En el primer caso, cuando $a \neq -\frac{1}{2}$ y $a \neq 1$, podemos hallar la solución única aplicando la regla de Cramer. Recordemos que $|A| = -2a^2 + a + 1$. Entonces:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2a & 1 & 1 \\ a-1 & -1 & 1 \\ a+3 & a-1 & a \end{vmatrix}}{-2a^2+a+1} = \frac{\left(-2a^2+a+3+a^2-2a+1\right)-\left(-a-3+a^2-a+2a^2-2a\right)}{-2a^2+a+1} =$$

$$= \frac{\left(-a^2-a+4\right)-\left(3a^2-4a-3\right)}{-2a^2+a+1} = \frac{-4a^2+3a+7}{-2a^2+a+1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & 2a & 1 \\ 1 & a-1 & 1 \\ 1 & a+3 & a \end{vmatrix}}{-2a^2+a+1} = \frac{\left(a^3-a^2+2a+a+3\right)-\left(a-1+2a^2+a^2+3a\right)}{-2a^2+a+1} =$$

$$= \frac{\left(a^3-a^2+3a+3\right)-\left(3a^2+4a-1\right)}{-2a^2+a+1} = \frac{a^3-4a^2-a+4}{-2a^2+a+1}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 2a \\ 1 & -1 & a-1 \\ 1 & a-1 & a+3 \end{vmatrix}}{-2a^2+a+1} = \frac{\left(-a^2-3a+a-1+2a^2-2a\right)-\left(-2a+a+3+a^3-2a^2+a\right)}{-2a^2+a+1} =$$

$$= \frac{\left(a^2-4a-1\right)-\left(a^3-2a^2+3\right)}{-2a^2+a+1} = \frac{-a^3+3a^2-4a-4}{-2a^2+a+1}$$

Como se puede apreciar, para cada valor del parámetro hay un sistema distinto y su correspondiente solución única. Por ejemplo, si $a = -1$, tendríamos que $x = 0$, $y = 0$, $z = -2$ (¡compruébese!).

Hay una interpretación geométrica de todo esto. Sabemos que una ecuación lineal del primer grado con tres incógnitas representa un plano en el espacio. Pues bien, si $a = -\frac{1}{2}$ o $a = 1$, los tres planos no tienen ningún punto en común.

Sin embargo, si $a \neq -\frac{1}{2}$ y $a \neq 1$, los tres planos tienen un punto en común, el punto de coordenadas

$$\left(\frac{-4a^2+3a+7}{-2a^2+a+1}, \frac{a^3-4a^2-a+4}{-2a^2+a+1}, \frac{-a^3+3a^2-4a-4}{-2a^2+a+1}\right)$$

Ejemplo 4

Dados los planos $\alpha \equiv x+y+z=1$, $\beta \equiv ax+y=1$, $\gamma \equiv x+(a+1)z=0$, determinar la posición relativa de los mismos según los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

Planteemos el sistema formado por los tres planos:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ ax+y=1 \\ x+(a+1)z=0 \end{cases}$$

La matriz de los coeficientes y la matriz ampliada son, respectivamente:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a+1 \end{pmatrix} \quad ; \quad A|b=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a+1 & 0 \end{pmatrix}$$

El rango de ambas es al menos dos pues hay un menor de orden dos distinto de cero:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0-1=-1\neq 0$$

Además, el determinante de A es

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a+1 \end{vmatrix} = (a+1+0+0)-(1+a(a+1)+0)=(a+1)-(1+a^2+a)=-a^2$$

Entonces $|A|=0 \Leftrightarrow -a^2=0 \Leftrightarrow a=0$.

Los distintos casos que se pueden dar los analizamos a continuación.

Si $a\neq 0$, entonces $r(A)=r(A|b)=3=n$, con lo que el sistema es compatible determinado (solución única). Esta solución es:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a+1 \end{vmatrix}}{-a^2}=0$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a+1 \end{vmatrix}}{-a^2}=\frac{(a+1)-\left(1+a^2+a\right)}{-a^2}=\frac{-a^2}{-a^2}=1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{-a^2} = 0$$

Si $a = 0$, la matriz ampliada es

$$A|b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

cuyo rango es dos pues todos los menores de orden tres son iguales a cero. También es fácil decidir que el rango es dos argumentando que la tercera fila es la primera menos la segunda.

Por tanto, en este caso, $r(A) = r(A|b) = 2 < 3 = n$, con lo que el sistema es compatible indeterminado, es decir, hay infinitas soluciones. Vamos a hallarlas. El grado de libertad del sistema es $3 - 2 = 1$, con lo que una incógnita va libre y las otras dos dependen de ella. Pongamos pues $z = \lambda$ y eliminemos la última ecuación. El sistema es el siguiente:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Rápidamente vemos que las soluciones del sistema anterior son $x = -\lambda$, $y = 1$, $z = \lambda$.

La interpretación geométrica de los dos casos anteriores es la siguiente.

Si $a \neq 0$ los tres planos se cortan en un punto de coordenadas

$$(x, y, z) = (0, 1, 0)$$

Si $a = 0$ los tres planos se cortan según una recta de ecuación vectorial

$$(x, y, z) = (-\lambda, 1, \lambda) = (0, 1, 0) + \lambda(-1, 0, 1)$$

Ejemplo 5
Discutamos por último el sistema

$$\begin{cases} x - y = 5 \\ y + z = a \\ x - 2z = 3 \\ 2x - 3z = a \end{cases}$$

para los diferentes valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

La matriz de los coeficientes y la matriz ampliada son, respectivamente:

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&1\\1&0&-2\\2&0&-3\end{pmatrix}\quad;\quad A|b=\begin{pmatrix}1&-1&0&5\\0&1&1&a\\1&0&-2&3\\2&0&-3&a\end{pmatrix}$$

El rango de la matriz A es tres, pues hay un menor de orden tres distinto de cero:

$$\begin{vmatrix}1&-1&0\\0&1&1\\1&0&-2\end{vmatrix}=-2-1=-3$$

Hallemos el determinante de la matriz $A|b$, que es cuadrada de orden cuatro:

$$|A|b|=\begin{vmatrix}1&-1&0&5\\0&1&1&a\\1&0&-2&3\\2&0&-3&a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-1&0&5\\1&0&1&a+5\\1&0&-2&3\\2&0&-3&a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&a+5\\1&-2&3\\2&-3&a\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}1&1&a+5\\0&-3&-a-2\\0&-5&-a-10\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-3&-a-2\\-5&-a-10\end{vmatrix}=(3a+30)-(5a+10)=-2a+20$$

Se deja al lector que analice las propiedades de los determinantes que se han utilizado para calcular el determinante anterior. Por tanto $|B|=0\Leftrightarrow a=10$, con lo que podemos hacer la siguiente discusión:

Si $a\neq 10\Rightarrow r\left(A|b\right)=4\neq r\left(A\right)=3$ y el sistema es incompatible.

Si $a=10\Rightarrow r\left(A|b\right)=r\left(A\right)=3$ y el sistema es compatible determinado (solución única). En este caso el sistema adopta la forma siguiente:

$$\left\{\begin{array}{l}x-y=5\\y+z=10\\x-2z=3\\2x-3z=10\end{array}\right.$$

Podemos eliminar la última ecuación y aplicar la regla de Cramer para obtener la solución del sistema.

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 10 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}}=\frac{(-10-3+0)-(0+20+0)}{-3}=\frac{-33}{-3}=11$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 10 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}}=\frac{(-20+5+0)-(0+0+3)}{-3}=\frac{-18}{-3}=6$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 10 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}}=\frac{(3-10+0)-(5+0+0)}{-3}=\frac{-12}{-3}=4$$