Sistemas de ecuaciones lineales. El método de Gauss

En los artículos anteriores se ha hablado de ecuaciones lineales de primer grado con dos incógnitas y de ecuaciones lineales de primer grado con tres incógnitas, así como su interpretación geométrica en el plano y en el espacio afín. En otro artículo, dedicado a los sistemas de dos ecuaciones lineales de primer grado con dos incógnitas, ya se ha hecho uso de un método para resolver sistemas de ecuaciones lineales: el método de Gauss. En este artículo se expone con detalle este método. Pero comenzaremos por el principio, explicando algunos conceptos previos.

Ecuación lineal

Es una ecuación polinómica de grado uno con una o varias incógnitas.

Por ejemplo, son ecuaciones lineales: $2x-3y+4z=8$, $2(3x-6y+z)-5=7y+z-1$. Sin embargo, no son ecuaciones lineales: $x^2-y+3z=1$, $2x-xy+3xyz=6$.

O sea, que para que una ecuación sea lineal, en cada término ha de haber a lo sumo una incógnita como mucho elevada a uno. Se llaman ecuaciones lineales porque una ecuación lineal con dos incógnitas geométricamente representa una recta (línea), y una ecuación lineal con tres incógnitas representa un plano.

Ecuaciones equivalentes

Dos ecuaciones son equivalentes cuando tienen la misma solución (o las mismas soluciones). Si se les suma o se les resta a los dos miembros de una ecuación un mismo número se obtiene una ecuación equivalente a la primera. Si se multiplican o dividen los dos miembros de una ecuación por un mismo número distinto de cero, también se obtiene una ecuación equivalente a la primera.

Por ejemplo: $\dfrac{-3(2x-y)}{3}-\frac{y-z}{4}=\frac{1}{2}+x$ es equivalente a $-12(2x-y)-(y-z)=6+12x$ (se han multiplicado todos los términos por 12), que es equivalente a $-24x+12y-y+z=6+12x$, que también es equivalente a $-36x+11y+z=6$. El razonamiento anterior, en lenguaje simbólico, se escribe así:

$$\frac{-3(2x-y)}{3}-\frac{y-z}{4}=\frac{1}{2}+x \Leftrightarrow -12(2x-y)-(y-z)=6+12x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -24x+12y-y+z=6+12x \Leftrightarrow -36x+11y+z=6$$

Por cierto, la ecuación anterior es un plano en el espacio afín tridimensional.

Sistemas de ecuaciones lineales

Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de ecuaciones lineales que se dan con el objetivo de determinar la solución o soluciones comunes a todas ellas.

Un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas representa un conjunto de rectas. Se trata de saber si se cortan o no en algún punto (que sería la solución del sistema). Si, en cambio, las ecuaciones tienen tres incógnitas, se trataría de un conjunto de planos y habría que determinar si tiene un punto en común, o una recta común (haz de planos), o no tienen ningún punto en común.

Sistemas de ecuaciones equivalentes

Son aquellos que tienen las mismas soluciones. Es posible que dos sistemas sean equivalentes sin que lo sean las ecuaciones que los forman. Por ejemplo, los sistemas

$$\left\{\begin{array}{l} 2x-3y=-7 \\ -x+y=-1 \end{array}\right. \quad \text{y} \quad \left\{\begin{array}{l} 4x+5y=-3 \\ -3x-2y=4 \end{array}\right.$$

tienen ambos por solución $x=-2$, $y=1$, es decir, son equivalentes. Sin embargo, las ecuaciones que los forman no son para nada equivalentes las de uno con las del otro.

Transformaciones para obtener sistemas equivalentes

Un sistema se puede transformar en otro que sea equivalente, es decir, que tenga la mismas soluciones. Estas transformaciones pretenden reducir el primer sistema a otro más sencillo y a su vez a otro más simple, con el objetivo de obtener las soluciones del último de manera fácil. Estas soluciones también lo serán del primero, pues todos ellos eran equivalentes. Las transformaciones para obtener sistemas equivalentes son:

1. Multiplicar o dividir los dos miembros de una de las ecuaciones por un número distinto de cero.

2. Añadir una ecuación que sea combinación lineal de las otras o, al contrario, suprimir una ecuación que sea combinación lineal de las otras.

3. Sustituir una ecuación por el resultado de sumarle otra multiplicada previamente por un número.

Veamos un ejemplo.

$$\left\{\begin{array}{l} 2x-5y=-1 \\ -3x+y=-5 \\ 5x-6y=4 \end{array}\right. \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x-5y=-1 \\ -3x+y=-5 \end{array}\right. \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 6x-15y=-3 \\ -6x+2y=-10 \end{array}\right. \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 6x-15y=-3 \\ \quad -13y=-13 \end{array}\right.$$

En la primera transformación se ha suprimido la tercera ecuación pues es el resultado de restar la primera menos la segunda. En la segunda transformación se ha multiplicado la primera por 3 y la segunda por 2. Y en la tercera transformación a la segunda ecuación se le ha sumado la primera. Obsérvese que el último sistema es fácil de resolver.

Clasificación de los sistemas según el número de soluciones. Ejemplos

Un sistema de ecuaciones se dice que es compatible si tiene solución. Si no tiene solución se dice

que es incompatible. Los sistemas compatibles pueden ser de dos tipos: compatible determinado si el sistema tiene una única solución, y compatible indeterminado si tiene infinitas soluciones.
Por ejemplo, el sistema del ejemplo anterior es compatible determinado, pues tiene una única solución ($x = 2$, $y = 1$). Ya sabemos que geométricamente significa que las rectas $2x - 5y = -1$, $-3x + y = -5$, $5x - 6y = 4$ son secantes, es decir, se cortan en un punto, el punto de coordenadas $(2, 1)$.
Veamos otro ejemplo.

$$\begin{cases} x - 3y = 5 \\ -2x + 6y = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 2x - 6y = 10 \\ -2x + 6y = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 2x - 6y = 10 \\ 0 = 11 \end{cases}$$

Supongo que serás capaz de interpretar las transformaciones realizadas. Observa que finalmente se obtiene la igualdad $0 = 11$, que es contradictoria. Esto quiere decir que el sistema no tiene solución: es un sistema incompatible. Geométricamente significa que las rectas $x - 3y = 5$, $-2x + 6y = 10$, son paralelas.
Hagamos ahora un par de ejemplos de sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas.
En primer lugar veamos un ejemplo de un sistema con solución única.

$$\begin{cases} -3x + y - 2z = 1 \\ 2x - 3y + z = -1 \\ x + 5y - z = -2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} -3x + y - 2z = 1 \\ \quad -7y - z = -1 \\ \quad 16y - 5z = -5 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} -3x + y - 2z = 1 \\ \quad -7y - z = -1 \\ \quad\quad -51z = -51 \end{cases}$$

Si llamamos f_1, f_2 y f_3 a las filas del sistema podemos abreviar las operaciones realizadas en cada una de las transformaciones del sistema. En la primera transformación se ha hecho las siguientes operaciones:

$$3f_2 + 2f_1 \quad ; \quad 3f_3 + f_1$$

Y en la segunda transformación se ha realizado la siguiente operación:

$$7f_3 + 16f_2$$

Es fácil deducir del último sistema que la solución del sistema es $x = -1$, $y = 0$, $z = 1$ y que, por tanto, el sistema es compatible determinado. Geométricamente quiere decir que los tres planos son secantes en un punto, es decir, que se tocan en un único punto de coordenadas $(-1, 0, 1)$.
Veamos a continuación otro ejemplo de sistema que tiene infinitas soluciones.

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 5 \\ -x - y + z = 0 \\ -4x - 7y + z = -15 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 2x + 3y - z = 5 \\ \quad y + z = 5 \\ \quad -y - z = -5 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 2x + 3y - z = 5 \\ \quad y + z = 5 \end{cases}$$

En este segundo ejemplo la primera transformación ha consistido en realizar las siguientes operaciones:

$$2f_2 + f_1 \quad ; \quad f_3 + 2f_2$$

Y en la segunda transformación hemos realizado la siguiente operación:

$$f_3 + f_2$$

Observa que al realizar la última transformación desaparece la última ecuación pues se obtienen $0x + 0y + 0z = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$, que no aporta nada. En este caso (cuando al final el número de incógnitas es mayor que el número de ecuaciones) hay infinitas soluciones: el sistema es compatible indeterminado. Para calcularlas se procede de la siguiente manera: a una de las dos incógnitas de la última ecuación se le nombra con otra letra (generalmente la letra griega λ, que recibe el nombre de parámetro. Este parámetro se pasa al segundo miembro y se resuelve el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas resultante. Llamemos pues $z = \lambda$. Entonces:

$$\left\{ \begin{array}{r} 2x + 3y - \lambda = 5 \\ y + \lambda = 5 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{r} 2x + 3y = 5 + \lambda \\ y = 5 - \lambda \end{array} \right.$$

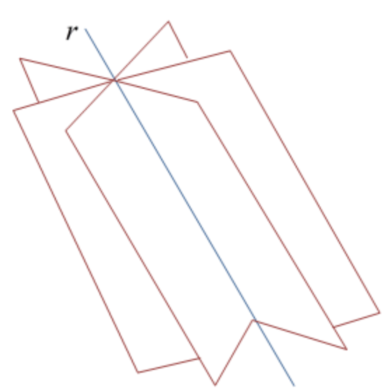
Sustituyendo el valor de y en la primera ecuación, operando y despejando la incógnita x, se obtiene:

$$2x - 3\,(5 - \lambda) = 5 + \lambda \Rightarrow 2x - 15 + 3\lambda = 5 + \lambda \Rightarrow 2x = 20 - 2\lambda \Rightarrow x = 10 - \lambda$$

Por tanto las infinitas soluciones del sistema son $x = 10 - \lambda, y = 5 - \lambda, z = \lambda$. O mediante la terna $(10 - \lambda,\ 5 - \lambda,\ \lambda)$. Geométricamente significa que los planos $2x + 3y - z = 5$, $-x - y + z = 0$, $-4x - 7y + z = 15$ son secantes según una recta, o bien que forman un haz de planos de base la recta

$$(10 - \lambda,\ 5 - \lambda,\ \lambda) = (10,\ 5,\ 0) + \lambda\,(-1,\ -1,\ 1)$$

Vamos, que los tres planos se cortan en una recta (ver figura de más abajo). Obsérvese que la recta anterior pasa por el punto $(10,\ 5,\ 0)$ y un vector director suyo es $(-1,\ -1,\ 1)$.



Sistemas escalonados

En los ejemplos anteriores, después de hacer las transformaciones pertinentes, se obtienen sistemas muy fáciles de resolver pues, desde abajo hacia arriba, vamos obteniendo el valor de cada incógnita por el método de sustitución. Este tipo de sistemas se llaman sistemas escalonados.

Obsérvese que en el caso del ejemplo anterior, donde el sistema era compatible indeterminado, el procedimiento de sustituir z por el parámetro *lambda* nos lleva a un sistema escalonado $\left\{ \begin{array}{r} 2x+3y-\lambda=5 \\ y+\lambda=5 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{r} 2x+3y=5+\lambda \\ y=5-\lambda \end{array} \right.$ que como vimos, también es muy fácil de resolver aunque las soluciones sean infinitas.

Hay sistemas que son escalonados, aunque a simple vista parece que no lo son.

Veamos otro par de ejemplos.

El sistema $\left\{ \begin{array}{l} 2x-3y=-1 \\ 2y=2 \\ 3x-2y+5z=6 \end{array} \right.$ no parece, aparentemente, escalonado. Pero observemos lo que ocurre si intercambiamos sus ecuaciones adecuadamente: $\left\{ \begin{array}{l} 3x-2y+5z=6 \\ 2x-3y=-1 \\ 2y=2 \end{array} \right.$ Además, si la incógnita z la ponemos en primer lugar, la incógnita x en segundo y la incógnita y en tercer lugar, el sistema queda así: $\left\{ \begin{array}{r} 5z+3x-2y=6 \\ 2x-3y=-1 \\ 2y=2 \end{array} \right.$. Ahora si se ve claramente que es escalonado y fácil de resolver (la solución es $x=1$, $y=1$, $z=1$).

Matriz asociada a un sistema de ecuaciones lineales

Un sistema, por ejemplo, de tres ecuaciones con tres incógnitas se puede escribir genéricamente así:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2 \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3 \end{array} \right.$$

donde a_{ij} son números reales llamados coeficientes; b_1, b_2, b_3 también son números reales llamados términos independientes; y las incógnitas son x, y, z. Si escribimos los coeficientes en filas y columnas obtenemos una expresión de la forma:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

a la que llamaremos matriz de los coeficientes. A veces se designa con la letra mayúscula A. Si a la matriz de los coeficientes le añadimos una columna con los términos independientes tendremos la expresión:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{pmatrix}$$

que recibe el nombre de matriz ampliada o matriz asociada al sistema. A veces se designa con la letra mayúscula B, o mediante la expresión $A|b$.
Método de Gauss
El proceso de transformación de un sistema de ecuaciones en otro equivalente, pero escalonado recibe el nombre de método de Gauss. En la práctica el método no se aplica con las ecuaciones, sino que se trabaja con la matriz asociada al sistema, con lo que se simplifica bastante el proceso de transformaciones sucesivas. Por tanto, una vez expresado el sistema mediante su matriz asociada, el método consiste en "hacer ceros", hasta llegar a una matriz asociada a un sistema escalonado. Para ello podemos hacer dos tipos de transformaciones, que nos llevarán a matrices asociadas a sistemas equivalentes:

- Multiplicar o dividir una fila por un número distinto de cero.
- Sumar a una fila otra, previamente multiplicada por un número distinto de cero.

Al aplicar el método de Gauss, ¿qué ocurre al finalizar el proceso, o incluso en algún paso intermedio? Podemos distinguir los siguientes casos.

- Que salga una fila de ceros. Entonces esta fila se corresponderá con una ecuación trivial y podremos prescindir de ella (ya hemos visto un ejemplo anteriormente).
- Que obtengamos dos filas iguales o proporcionales. Entonces podemos eliminar una de las dos, pues se corresponden con ecuaciones equivalentes.
- Que obtengamos una fila de ceros, salvo el último número, que es distinto de cero. Entonces se trata de una ecuación imposible y, en este caso, el sistema es incompatible.

Conclusión: una vez finalizado el proceso llegaremos a una de las tres posibilidades siguientes, o equivalentes a alguna de ellas:

1. $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ 0 & 0 & a_{33} & b_3 \end{pmatrix}$, donde a_{33} es un número distinto de cero y b_3 un número real cualquiera. En este caso tenemos tantas ecuaciones como incógnitas. Se obtiene un sistema escalonado, del que es muy fácil obtener la única solución. El sistema es compatible determinado.

2. $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & b_2 \end{pmatrix}$, donde a_{22} es un número distinto de cero. En este caso hay menos ecuaciones que incógnitas. Ya hemos resuelto anteriormente un sistema de este tipo y así se procede. Hay infinitas soluciones: el sistema es compatible indeterminado.
3. $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 \end{pmatrix}$, donde b_3 es distinto de cero. Esto es imposible y el sistema es incompatible, es decir, no tiene soluciones.

Veamos otro par de ejemplos.
Apliquemos el método de Gauss a la resolución del sistema

$$\begin{cases} -x+y+3z=-2 \\ 4x+2y-z=5 \\ 2x+4y-7z=1 \end{cases}$$

Transformando la matriz asociada al sistema:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & 4 & -7 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 6 & 11 & -3 \\ 0 & 6 & -13 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 6 & 11 & -3 \\ 0 & 0 & -24 & 0 \end{pmatrix}$$

En la primera transformación hemos hecho las operaciones f_2+4f_1 y $2f_3-f_2$. En la segunda transformación hemos hecho la operación f_3-f_2. Nos encontramos en el caso 1: el sistema es compatible determinado. El sistema asociado es:

$$\begin{cases} -x+y+3z=-2 \\ \quad 6y+11z=-3 \\ \qquad -24z=0 \end{cases}$$

sistema escalonado cuyas soluciones son muy fáciles de obtener: $z=0$, $y=-\dfrac{1}{2}$, $x=\dfrac{3}{2}$.
Resolvamos ahora el sistema

$$\begin{cases} x-y+2z=1 \\ 2x+3y-z=-1 \\ -x-4y+3z=5 \end{cases}$$

Escribamos la matriz asociada y hagamos las transformaciones oportunas (transformaciones que no son difíciles de descubrir):

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & -3 \\ 0 & -5 & 5 & 9 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Estamos en el caso 3. Por tanto el sistema es incompatible y no tiene solución. Obsérvese que el sistema asociado es

$$\left\{ \begin{aligned} x - y + 2z &= 1 \\ 5y - 5z &= -3 \\ 0z &= 6 \end{aligned} \right.$$

La última de las ecuaciones no tiene sentido. Por eso el sistema es incompatible.
Discusión de sistemas dependientes de un parámetro
Hay sistemas que dependen de un parámetro. Por ejemplo

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 6 \\ 2x - y - z = -3 \\ x + ky - 3z = 0 \end{array} \right.$$

Este tipo de sistemas son en realidad "muchos sistemas". Hay uno para cada valor del parámetro k. De todos ellos algunos serán compatibles y otros incompatibles. Por tanto, discutir un sistema dependiente de un parámetro consiste en encontrar los valores del parámetro para los que el sistema es compatible o no y, caso de ser compatible, distinguir cuándo es determinado o indeterminado. Para ello se procede igual que en los ejemplos anteriores, utilizando el método de Gauss y tomando el parámetro como si fuera un número. Como ejemplo, discutamos el sistema anterior. Tomemos la matriz asociada y apliquemos las transformaciones oportunas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & -1 & -3 \\ 1 & k & -3 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -3 & -15 \\ 0 & k-1 & -4 & -6 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & k-1 & -4 & -6 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -3-k & -1-5k \end{pmatrix}$$

Obsérvese que hemos realizado tres transformaciones. En la primera se han hecho las siguientes operaciones: $f_2 - 2f_1$ y $f_3 - f_1$. En la segunda hemos dividido la segunda fila entre -3. Y en la tercera hemos realizado la operación $f_3 - (k-1)f_2$.
Analicemos lo que pasa ahora.

Si $-3-k=0$, es decir, si $k=3$, entonces estamos en el caso 3 y el sistema es incompatible: la última matriz es, en este caso

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 14 \end{pmatrix}$$

con lo que la última ecuación $(0=14)$ es imposible.
Ahora bien, si $k\neq 3$, estamos en el caso 1, pues $-3-k\neq 0$, y el sistema será compatible determinado (solución única). En este caso el sistema asociado a la última matriz es

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=6 \\ \quad y+z=5 \\ (-3-k)\,z=-1-5k \end{array}\right.$$

De aquí se deduce que

$$z=\frac{-1-5k}{-3-k}=\frac{(-1)\,(5k+1)}{(-1)\,(k+3)}\Rightarrow z=\frac{5k+1}{k+3}$$

Sustituyendo en la segunda ecuación:

$$y+\frac{5k+1}{k+3}=5\Rightarrow y=5-\frac{5k+1}{k+3}=\frac{5\,(k+3)}{k+3}-\frac{5k+1}{k+3}=\frac{5k+15-5k-1}{k+3}\Rightarrow y=\frac{14}{k+3}$$

Finalmente, sustituyendo en la primera:

$$x+\frac{14}{k+3}+\frac{5k+1}{k+3}=6\Rightarrow x+\frac{5k+15}{k+3}=6\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=6-\frac{5k+15}{k+3}=\frac{6\,(k+3)}{k+3}-\frac{5k+15}{k+3}=\frac{6k+18-5k-15}{k+3}=\frac{k+3}{k+3}\Rightarrow x=1$$

Resumiendo:
Si $k=-3$ el sistema es incompatible: no tiene solución. Es el caso del sistema

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=6 \\ 2x-y-z=-3 \\ x-3y-3z=0 \end{array}\right.$$

donde se ha sustituido k por -3.
Si $k\neq -3$, el sistema es compatible es determinado: solución única, una para cada valor de k. Tal solución única es

$$x=1\quad ;\quad y=\frac{14}{k+3}\quad ;\quad z=\frac{5k+1}{k+3}$$

Por ejemplo, si $k = -1$, el sistema se convierte en

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y - z = -3 \\ x - y - 3z = 0 \end{cases}$$

y la única solución es $x = 1$, $y = 7$, $z = 2$. Es conveniente insistir en que para cada $k \neq -3$ hay un sistema y una única solución para ése valor de k.