Sistemas de dos ecuaciones lineales de primer grado con tres incógnitas

Un sistema de dos ecuaciones lineales de primer grado con tres incógnitas tiene la siguiente forma

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Ya sabemos que una ecuación lineal de primer grado con tres incógnitas es, desde el punto de vista geométrico, un plano en el espacio. En este caso tenemos dos en su forma general:

$$\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0 \quad ; \quad \pi' \equiv A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

Las posibles posiciones relativas de dos planos en el espacio son tres: *coincidentes*, *paralelos* y *secantes*. Utilizaremos el teorema de Rouché para interpretar las soluciones del sistema e identificarlas con la posición relativa correspondiente.

Sean pues, respectivamente,

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} A & B & C & -D \\ A' & B' & C' & -D' \end{pmatrix}$$

la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada del sistema (1). Como hay tres incógnitas escribiremos $n = 3$. Veamos ahora los casos que se pueden presentar.

Caso 1.

$$\text{rango} \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} A & B & C & -D \\ A' & B' & C' & -D' \end{pmatrix} = 1 < 3 = n$$

El sistema es compatible indeterminado. Es decir, existen infinitas soluciones. En este caso las filas son proporcionales, con lo que los dos planos serán coincidentes. La condición pues para que esto ocurra es

$$\pi \equiv \pi' \Leftrightarrow \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}$$

Caso 2.

$$\text{rango} \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix} = 1 \neq \text{rango} \begin{pmatrix} A & B & C & -D \\ A' & B' & C' & -D' \end{pmatrix} = 2$$

El sistema no tiene solución, con lo que los planos serán paralelos. En este caso las filas de la matriz de los coeficientes son proporcionales, pero no lo son las de la matriz ampliada. Por tanto es fácil deducir que la condición para que los dos planos sean paralelos es la siguiente:

$$\pi \,||\, \pi' \Leftrightarrow \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}$$

Caso 3.

$$\text{rango}\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix} = \text{rango}\begin{pmatrix} A & B & C & -D \\ A' & B' & C' & -D' \end{pmatrix} = 2 < 3 = n$$

El sistema vuelve a ser compatible indeterminado. Es decir, hay infinitas soluciones. La única posibilidad es que estas soluciones, al ser el rango dos y no ser las filas proporcionales, estén sobre la recta donde se cortan ambos planos. En este caso los planos son secantes según una recta: $\pi \cap \pi' = r$. Las soluciones, o lo que es lo mismo, la recta de corte de ambos planos, se puede obtener hallando las soluciones del sistema (que dependerán de un parámetro). De este modo obtendríamos las ecuaciones paramétricas de la recta. De hecho, si los planos son secantes según una recta r, al conjunto de las dos ecuaciones del sistema se les llama ecuaciones implícitas de la recta:

$$r \equiv \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D = 0 \end{cases}$$

Veamos un ejemplo de este último caso.

Sean los planos $\pi \equiv 2x - 3y + z - 1 = 0$ y $\pi' \equiv -x + y - 4z + 1 = 0$. El sistema formado por ambos es:

$$\begin{cases} 2x - 3y + z - 1 = 0 \\ -x + y - 4z + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 3y + z = 1 \\ -x + y - 4z = -1 \end{cases}$$

Es muy fácil darse cuenta de que

$$\text{rango}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -4 \end{pmatrix} = \text{rango}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -4 & -1 \end{pmatrix} = 2$$

pues hay un menor de orden dos distinto de cero:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 3 = -1 \neq 0$$

Si llamamos $z = \lambda$, el sistema lo podemos escribir así:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 - \lambda \\ -x + y = -1 + 4\lambda \end{cases}$$

cuyas soluciones son, aplicando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 \\ -1+4\lambda & 1 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{1 - \lambda - (3 - 12\lambda)}{-1} = \frac{-2 + 11\lambda}{-1} = 2 - 11\lambda$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1-\lambda \\ -1 & -1+4\lambda \end{vmatrix}}{-1}=\frac{-2+8\lambda-(-1+\lambda)}{-1}=\frac{-1+7\lambda}{-1}=1-7\lambda$$

Estas soluciones las podemos escribir así:

$$(x,y,z)=(2-11\lambda,1-7\lambda,\lambda)=(2,1,0)+\lambda\,(-11,7,1)$$

que no es otra cosa que la ecuación vectorial de la recta que pasa por el punto $P\,(2,1,0)$ y tiene vector director $\vec{u}=(-11,-7,1)$.

En la siguiente figura se pueden apreciar los dos planos y la recta donde se cortan ambos.