Rango de una matriz

En un artículo anterior dijimos que el rango de una matriz A, $r(A)$, es el número de filas que son linealmente independientes. También se hizo uso del método de Gauss para calcular el rango de una matriz: una vez aplicado el método, el rango de una matriz coincide con el número de filas no nulas.

Pero hay otro método, en muchos casos más eficiente, para calcular rangos de matrices. Para ello haremos uso de los determinantes.

Antes de nada daremos algunas definiciones. Para ello supongamos que tenemos una matriz de orden $m \times n$: $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$.

- Se llama *submatriz* de A a cualquier matriz que se obtenga a partir de A suprimiendo filas y columnas.
- Si una submatriz de A es cuadrada de orden k, a su determinante se le llama *menor* de orden k de la matriz A.
- Al menor formado por las k primeras filas y las k primeras columnas de A se le llama *menor principal* de orden k y lo denotaremos δ_k. Si la matriz A es cuadrada, es decir, si $m = n$, entonces $\delta_k = |A|$.

Veamos un ejemplo para entender las definiciones anteriores.

Supongamos que tenemos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 & -6 \\ 2 & 0 & 9 & -5 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 4 & -7 \end{pmatrix}$$

Entonces, por un lado, el menor de orden dos formado por las filas tercera y cuarta y por las columnas segunda y tercera; y por otro, el menor principal de orden tres, son los siguientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} \quad ; \quad \begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 9 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Ahora ya estamos en condiciones de definir el rango de una matriz.

Definición.

Se define el rango de una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ como el mayor orden de los menores no nulos de A. Al rango de la matriz A lo denotaremos por $r(A)$.

Por ejemplo, dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

vemos claramente que hay más de un menor de orden dos distinto de cero. Por ejemplo, el menor principal de orden dos es

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 4 = 5 \neq 0$$

Esto quiere decir que el rango de la matriz A es, como mínimo, 2. Si hubiera algún menor de orden tres distinto de cero el rango sería igual a 3. Pero resulta que

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad ; \quad \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad ; \quad \begin{vmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Es decir, todos los menores de orden tres son iguales a cero, con lo que el rango de la matriz no es 3. Por tanto $r(A) = 2$. Obsérvese que, en este caso, también habría sido fácil decidir que el rango es dos porque la última fila de la matriz A es la suma de las dos primeras, es decir, las tres filas no son linealmente independientes, sino que únicamente lo son dos de ellas y por eso el rango de la matriz A es 2.

El rango de una matriz tiene algunas propiedades de interés que pasamos a enumerar a continuación.

1. El rango de una matriz no varía si se intercambian entre sí dos filas o dos columnas.

2. Si una matriz A tiene una fila o columna de ceros, el rango de A coincide con el de la matriz que se obtiene al suprimir esta fila o esta columna.

3. El rango de una matriz no cambia si se suprime una fila o columna que sea combinación lineal de las restantes.

Utilizando la propiedad número 3 y la observación realizada anteriormente podríamos escribir

$$\text{rango}\begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \text{rango}\begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \end{pmatrix} = 2$$

Esta forma de calcular rangos utilizando los determinantes es más eficiente que el método de Gauss cuando se trata de calcular el rango de una matriz que depende de uno o más parámetros.

Así, por ejemplo, discutamos para los distintos valores de $m \in \mathbb{R}$, el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ m+1 & 3 & m-1 \\ m-1 & m+3 & -1 \end{pmatrix}$$

En primer lugar, observemos que, al ser la matriz cuadrada de orden 3, el rango será tres cuando $|A| \neq 0$. Calculemos pues el determinante de la matriz A y decidamos para qué valores de m el rango es 3 y para cuáles no.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ m+1 & 3 & m-1 \\ m-1 & m+3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ m & 0 & m \\ m-2 & m & 0 \end{vmatrix} = \left(3m^2 - 6m - m^2\right) - m^2 = m^2 - 6m$$

En el primer paso, aplicando las propiedades de los determinantes, hemos restado a la segunda fila la primera y a la tercera también la primera, con lo que el determinante no varía. Así, el determinante queda más sencillo para aplicar la regla de Sarrus. Ahora es fácil hacer el siguiente razonamiento:

- $|A| = 0 \Leftrightarrow m^2 - 6m = 0 \Leftrightarrow m = 0$ o $m = 6$.
- $|A| \neq 0 \Leftrightarrow m^2 - 6m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$ y $m \neq 6$.

Por tanto está claro que si $m \neq 0$ y $m \neq 6$, entonces $r(A) = 3$; y que si $m = 0$ o $m = 6$, entonces $r(A) < 3$. Analicemos lo que ocurre en estos dos últimos casos.

$$m = 0 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \; ; \; m = 6 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 7 & 3 & 5 \\ 5 & 9 & -1 \end{pmatrix}$$

Con lo que, si $m = 0$ o $m = 6$, se tiene que $r(A) = 2$, pues en ambos casos se pueden encontrar menores de orden dos distintos de cero.

Finalmente resolveremos un sistema de ecuaciones que dependa de un parámetro. Recordemos que, según el teorema de Rouché-Frobenius, un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas tiene solución si $r(A) = r(A|b)$, donde A es la matriz de los coeficientes y $A|b$ es la matriz ampliada, la cual resulta de añadir a la matriz A la columna de los términos independientes del sistema. Si $r(A) \neq r(A|b)$, el sistema no tiene solución (incompatible). Además, si $r(A) = r(A|b) = n$ el sistema tiene solución única (compatible determinado); y si $r(A) = r(A|b) < n$ el sistema tiene infinitas soluciones (compatible indeterminado).

Supongamos que deseamos saber el carácter del sistema

$$\begin{cases} mx + z = 1 \\ my + z = m \\ -mx - my + (m+1)\,z = -m - 1 \end{cases}$$

en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$.

Observemos en primer lugar que la forma matricial del sistema es

$$\begin{pmatrix} m & 0 & 1 \\ 0 & m & 1 \\ -m & -m & m+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ m \\ -m-1 \end{pmatrix}$$

Además

$$A = \begin{pmatrix} m & 0 & 1 \\ 0 & m & 1 \\ -m & -m & m+1 \end{pmatrix} \; ; \; (A|b) = \begin{pmatrix} m & 0 & 1 & 1 \\ 0 & m & 1 & m \\ -m & -m & m+1 & -m-1 \end{pmatrix}$$

Por un lado tenemos que

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 0 & 1 \\ 0 & m & 1 \\ -m & -m & m+1 \end{vmatrix} = m^3 + m^2 - \left(-m^2 - m^2\right) = m^3 + 3m^2 = m^2\,(m+3)$$

con lo que si $m = 0$ o $m = -3$, entonces $|A| = 0$ y en estos dos casos el rango de la matriz A no puede ser 3. Sin embargo, si $m \neq 0$ y $m \neq -3$, tenemos que $|A| \neq 0$, con lo que en este caso $r(A) = r(A|b) = 3$ y el sistema será compatible determinado (solución única).

Si $m = 0$ tenemos que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ ; \ (A|b) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

con lo que claramente $r(A) = 1$ (las tres filas de A son iguales) y $r(A|b) = 2$, pues hay al menos un menor de orden dos distinto de cero. Por tanto $r(A) \neq r(A|b)$ y el sistema será incompatible (no tiene solución).

En el caso $m = -3$ se tiene que

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix} \ ; \ (A|b) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 3 & 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Ahora también es claro que hay menores de orden dos de la matriz A distintos de cero, con lo que $r(A) = r(A|b) = 2$ y el sistema será compatible indeterminado (infinitas soluciones). En estos casos al número $n - r(A)$ se le llama grado de libertad del sistema e indica el número de incógnitas que van libres. El resto de incógnitas se podrán poner en función de las que van libres. En este caso, como $n - r(A) = 3 - 2 = 1$, tenemos que una incógnita va libre (por ejemplo $z = \lambda$) y las otras dos, x e y se pueden expresar en función de $z = \lambda$. Además podemos eliminar una de las ecuaciones del sistema pues, al ser $r(A) = r(A|b) = 2$, cualquiera de ellas depende linealmente de las otras dos. Por tanto:

$$\begin{cases} -3x + z = 1 \\ -3y + z = -3 \\ 3x + 3y - 2z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x = 1 - \lambda \\ -3y = -3 - \lambda \end{cases}$$

de donde se deduce claramente que $x = \dfrac{\lambda + 1}{3}$, $y = \dfrac{\lambda + 3}{3}$, $z = \lambda$.

También se pueden obtener, en función del parámetro m, la solución cuando el sistema es compatible determinado. Recordemos que $|A| = m^2(m + 3)$. Aplicando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ m & m & 1 \\ -m-1 & -m & m+1 \end{vmatrix}}{m^2\,(m+3)} = \frac{\left(m^2 + m - m^2\right) - \left(-m^2 - m - m\right)}{m^2\,(m+3)} =$$

$$= \frac{m^2 + 3m}{m^2\,(m+3)} = \frac{m\,(m+3)}{m^2\,(m+3)} = \frac{1}{m}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 0 & m & 1 \\ -m & -m-1 & m+1 \end{vmatrix}}{m^2\left(m+3\right)}=\frac{\left(m^3+m^2-m\right)-\left(-m^2-m^2-m\right)}{m^2\left(m+3\right)}=$$

$$=\frac{m^3+3m^2}{m^2\left(m+3\right)}=\frac{m^2\left(m+3\right)}{m^2\left(m+3\right)}=1$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} m & 0 & 1 \\ 0 & m & m \\ -m & -m & -m-1 \end{vmatrix}}{m^2\left(m+3\right)}=\frac{\left(-m^3-m^2\right)-\left(-m^2-m^3\right)}{m^2\left(m+3\right)}=\frac{0}{m^2\left(m+3\right)}=0$$

Por ejemplo, si $m=-5$, el sistema es

$$\begin{cases} -5x+z=1 \\ -5y+z=-5 \\ 5x+5y-4z=4 \end{cases}$$

cuyas soluciones son $x=-\dfrac{1}{5}$, $y=1$, $z=0$.