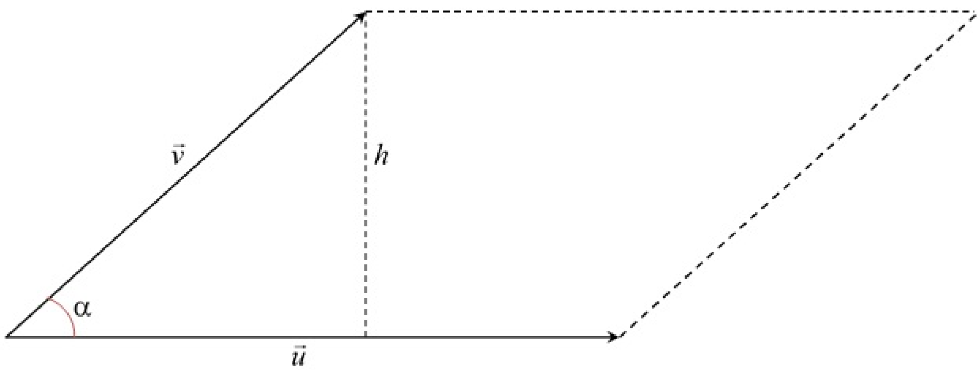
Producto vectorial. Producto mixto de tres vectores. Aplicaciones

Producto vectorial

Para una lectura comprensiva de este artículo se recomienda leer antes este otro: Proyecciones. Producto escalar de vectores. Aplicaciones.

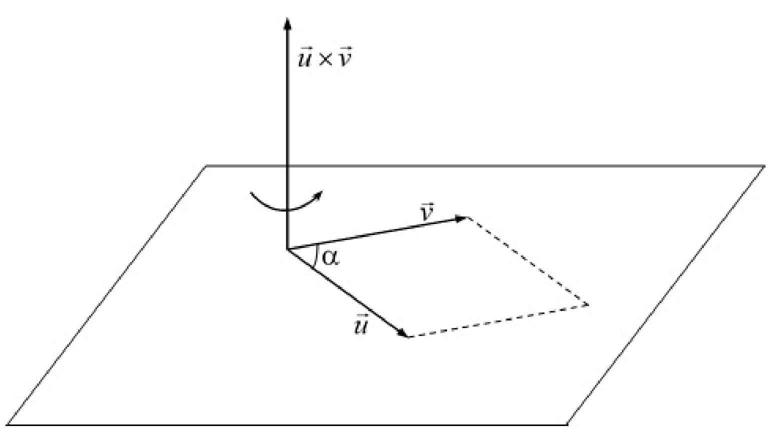
Dados dos vectores de distinta dirección podemos construir, trasladando cada vector al extremo del otro, un el paralelogramo. Fíjate en la figura siguiente



Su área es el producto de la base por la altura y, con un poco de trigonometría básica, tenemos:

$$A = |\vec{u}|\, h = |\vec{u}| \;\; |\vec{v}| \operatorname{sen} \alpha$$

El producto vectorial de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, que notaremos $\vec{u} \times \vec{v}$ (en este orden), se define como otro vector que tiene por módulo el área del paralelogramo formado por ambos, por dirección la de la recta perpendicular al plano que contiene a este paralelogramo, y el sentido de girar desde $\vec{u}$ hacia $\vec{v}$ (regla del sacacorchos).



Es conveniente insistir en que el producto vectorial de dos vectores $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, a diferencia del producto escalar, es un vector $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$. Vamos a obtener a continuación la expresión analítica del vector $\vec{w} = (z, y, z)$, que será de gran utilidad en la resolución de diversos tipos de problemas.
Como $\vec{u} \perp \vec{w}$ y $\vec{v} \perp \vec{w}$, entonces $\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$ y $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$, con lo que podemos formar el siguiente sistema:

$$\begin{cases} u_1 x + u_2 y + u_3 z = 0 \\ v_1 x + v_2 y + v_3 z = 0 \end{cases}$$

El sistema anterior es claramente compatible indeterminado ya que si suponemos que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen distinta dirección, el rango de la matriz $\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$ es dos y el número de incógnitas es tres.
Vamos a resolver el sistema anterior. Para ello vamos a suponer, ya que el rango es dos, que el determinante de orden dos $\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$ es distinto de cero. Ahora llamamos $z = \lambda$, con lo que el sistema se convierte en

$$\begin{cases} u_1 x + u_2 y = -u_3 \lambda \\ v_1 x + v_2 y = -v_3 \lambda \end{cases}$$

cuyas soluciones son, aplicando la regla de Cramer, las siguientes:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -u_3\lambda & u_2 \\ -v_3\lambda & v_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}} = -\lambda \frac{\begin{vmatrix} u_3 & u_2 \\ v_3 & v_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}} = \lambda \frac{\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}} \; ; \; y = \frac{\begin{vmatrix} u_1 & -u_3\lambda \\ v_1 & -v_3\lambda \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}} = -\lambda \frac{\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}} \; ; \; z = \lambda$$

Tomando $\lambda = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$, las soluciones anteriores las podemos escribir así:

$$x = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \; ; \; y = -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \; ; \; z = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$$

Esto quiere decir que el producto vectorial de $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\vec{u} \times \vec{v}$, es otro vector cuyas coordenadas son

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

Estas coordenadas coinciden exactamente con el desarrollo del siguiente determinante por los elementos de la primera fila:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

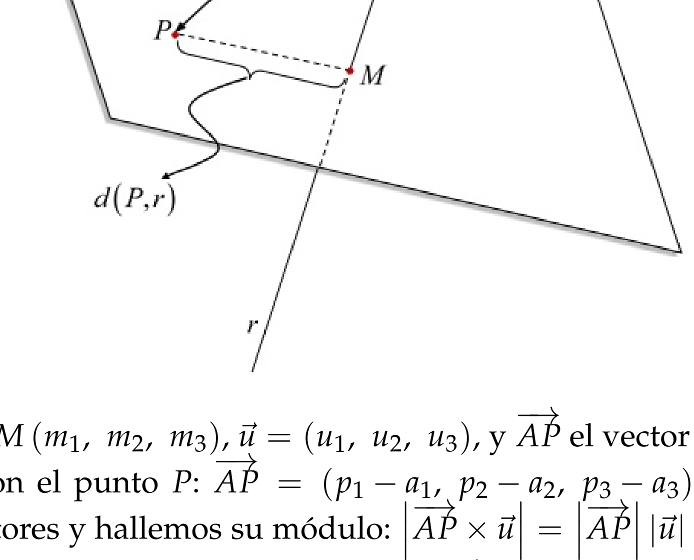
La expresión anterior es fácil de recordar y usando la misma podemos hallar con facilidad las coordenadas del producto vectorial de dos vectores dados.

Algunas aplicaciones del Producto vectorial

Distancia de un punto a una recta

Dados un punto P y una recta r, se llama distancia de P a r, que denotaremos $d\,(P, r)$, a la distancia de P a M, donde M es el punto de intersección de r con el plano que pasa por P y es perpendicular a r. Si $P\,(p_1, p_2, p_3)$ y la recta r tiene ecuaciones continuas $r \equiv \frac{x-a_1}{u_1} = \frac{y-a_2}{u_2} = \frac{z-a_3}{u_3}$, entonces la distancia de a viene dada por:

$$d(P,\ r) = \frac{|(p_1 - a_1,\ p_2 - a_2,\ p_3 - a_3) \times (u_1,\ u_2,\ u_3)|}{\sqrt{{u_1}^2 + {u_2}^2 + {u_3}^2}}$$



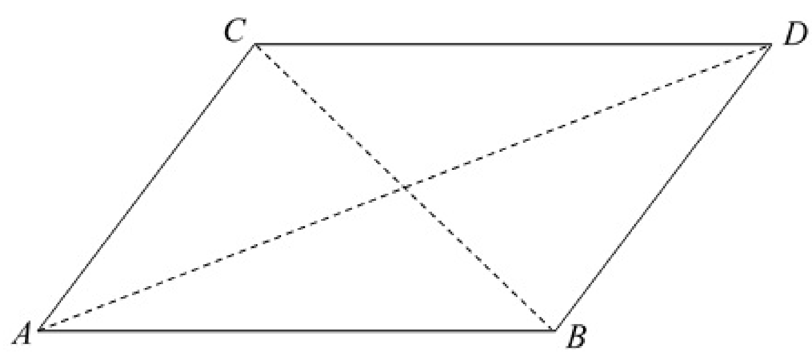
Para demostrarlo sean $M\,(m_1,\ m_2,\ m_3)$, $\vec{u} = (u_1,\ u_2,\ u_3)$, y $\overrightarrow{AP}$ el vector que une un punto cualquiera A de la recta con el punto P: $\overrightarrow{AP} = (p_1 - a_1,\ p_2 - a_2,\ p_3 - a_3)$. Hagamos el producto vectorial de ambos vectores y hallemos su módulo: $\left|\overrightarrow{AP} \times \vec{u}\right| = \left|\overrightarrow{AP}\right| |\vec{u}|\ \operatorname{sen}\alpha$. En la figura anterior se observa que la distancia buscada es $d(P, r) = \left|\overrightarrow{AP}\right| \operatorname{sen}\alpha$, y sustituyendo en la expresión anterior tenemos $\left|\overrightarrow{AP}\times\vec{u}\right| = d(P,r)\,|\vec{u}|$, luego

$$d(P,r) = \frac{\left|\overrightarrow{AP}\times\vec{u}\right|}{|\vec{u}|} = \frac{|(p_1-a_1,\ p_2-a_2,\ p_3-a_3)\times(u_1,\ u_2,\ u_3)|}{\sqrt{{u_1}^2+{u_2}^2+{u_3}^2}}$$

Distancia entre dos rectas paralelas

Se define esta distancia como la distancia de un punto de cualquiera de una recta a la otra. Así, si las rectas tienen ecuaciones continuas: $r \equiv \frac{x-a_1}{u_1} = \frac{y-a_2}{u_2} = \frac{z-a_3}{u_3}$ y $s \equiv \frac{x-b_1}{u_1} = \frac{y-b_2}{u_2} = \frac{z-b_3}{u_3}$ (obsérvese que, por ser paralelas, tienen el mismo vector director), basta aplicar la fórmula de la distancia del punto $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ a la segunda recta.

Área de un paralelogramo y de un triángulo



Ya se ha comentado al principio que el módulo del producto vectorial de dos vectores es igual al área del paralelogramo correspondiente. En particular, dado un paralelogramo $ABCD$ en el espacio, supongamos que las coordenadas de tres vértices son $A\,(a_1,a_2,a_3)$, $B\,(b_1,b_2,b_3)$ y $C\,(c_1,c_2,c_3)$. Si llamamos S al área o superficie del paralelogramo, entonces:

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_1-a_1 & b_2-a_2 & b_3-a_3 \\ c_1-a_1 & c_2-a_2 & c_3-a_3 \end{vmatrix} \Rightarrow S = \left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$$

El área o superficie del triángulo será la mitad de la del paralelogramo (cualesquiera de las dos diagonales del paralelogramo dividen al mismo en dos triángulos de igual área). Por tanto la superficie S del triángulo, conocidos sus tres vértices A, B y C es:

$$S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$$

Producto mixto de vectores

Dados tres vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ se llama producto mixto de dichos vectores al número obtenido así:

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$$

El producto mixto se denota así: $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$. Si las coordenadas de los vectores son $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$, entonces:

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (u_1,\ u_2,\ u_3) \cdot \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right) =$$

$$= u_1 \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - u_2 \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

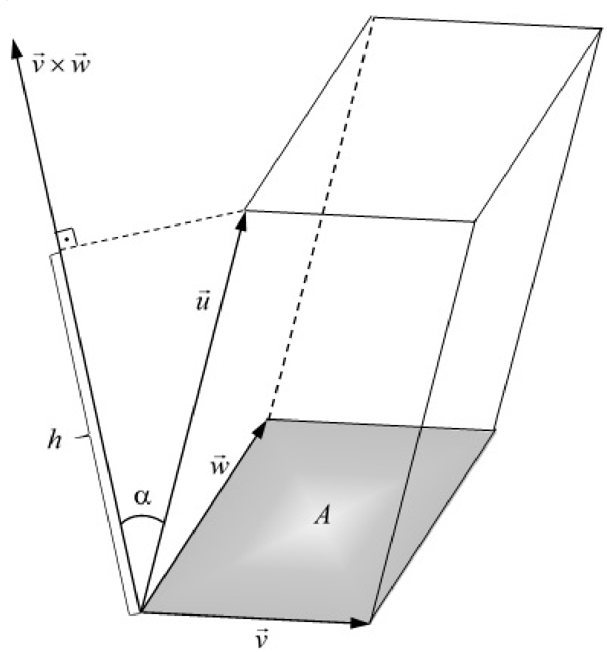
Por tanto, el producto mixto de tres vectores viene dado por la siguiente expresión:

$$(\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}) = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

El producto mixto se usa, por ejemplo, en el cálculo de volúmenes. A continuación vamos a deducir un par de fórmulas mediante las cuales podamos obtener el volumen de un tetraedro y el volumen de un paralelepípedo o prisma rectangular.

Volumen de un paralelepípedo o prisma rectangular

Observemos la siguiente figura



Sabemos, por la definición de producto escalar que $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}\times\vec{w}|\cdot\cos\alpha$. Pero, tal y como hemos visto, $|\vec{u}\times\vec{w}|$, representa el área A sombreada en la figura anterior. Además, también tenemos que $\cos\alpha=\frac{h}{|\vec{u}|}$, con lo que $h=\vec{u}\cdot\cos\alpha$, que representa la altura h del paralelepípedo dibujado. Resulta por consiguiente que

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}\times\vec{w}|\cdot\cos\alpha=A\cdot h$$

Es decir, que el producto mixto $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})$, representa geométricamente el volumen $A\cdot h$ del paralelepípedo de lados $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$. En coordenadas, si $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$, $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ y $\vec{w}=(w_1,w_2,w_3)$, el volumen V lo podemos expresar así:

$$V=\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=\left|\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\\ w_1 & w_2 & w_3\end{vmatrix}\right|$$

Obsérvese que escribimos valor absoluto para asegurarnos de que el volumen es positivo.
Si lo que conocemos son los vértices $A\,(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $B\,(b_1,\ b_2,\ b_3)$, $C\,(c_1,\ c_2,\ c_3)$ y $D\,(d_1,\ d_2,\ d_3)$, del prisma rectangular de tal manera que $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{v}$ y $\overrightarrow{AD}=\vec{w}$, entonces la fórmula del volumen V del paralelepípedo viene dada por

$$V=\left|\begin{vmatrix} b_1-a_1 & b_2-a_2 & b_3-a_3\\ c_1-a_1 & c_2-a_2 & c_3-a_3\\ d_1-a_1 & d_2-a_2 & d_3-a_3\end{vmatrix}\right|$$

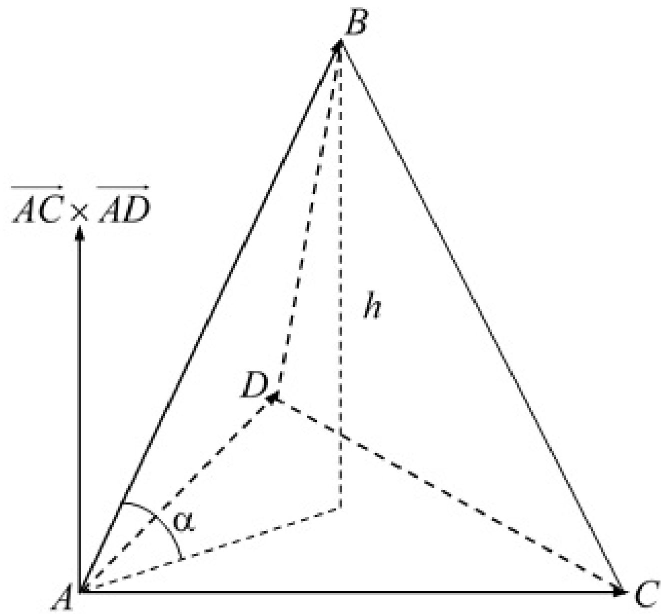
Volumen de un tetraedro

Sean $A\,(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $B\,(b_1,\ b_2,\ b_3)$, $C\,(c_1,\ c_2,\ c_3)$ y $D\,(d_1,\ d_2,\ d_3)$ cuatro puntos del espacio. Al unirlos entre sí de todas las maneras posibles, determinan un tetraedro cuyo volumen V es igual a la sexta parte del valor absoluto del producto mixto $\left(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{AD}\right)$, es decir:

$$V=\frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} b_1-a_1 & b_2-a_2 & b_3-a_3\\ c_1-a_1 & c_2-a_2 & c_3-a_3\\ d_1-a_1 & d_2-a_2 & d_3-a_3\end{vmatrix}\right|$$

La demostración se basa en que el volumen de un tetraedro es la tercera parte del área de la base por la altura:

$$V=\frac{1}{3}\,(\text{rea}\ ACD)\cdot h$$



Por un lado, el área del triángulo ACD sabemos que es igual a $\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}\right|$ y, por otro (ver figura anterior), $\operatorname{sen}\alpha = \frac{h}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}$, es decir, $h = \left|\overrightarrow{AB}\right| \operatorname{sen}\alpha = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$. Sustituyendo estos valores en la fórmula del volumen tenemos:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right| \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) =$$

$$= \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} \cdot \left(\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}\right) = \frac{1}{6}\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & c_3 - a_3 \\ d_1 - a_1 & d_2 - a_2 & d_3 - a_3 \end{vmatrix}$$

Según el orden en que tomemos los vectores ese determinante puede salir positivo o negativo. Por lo tanto, para que el volumen sea positivo, en la fórmula pondremos el valor absoluto del determinante.