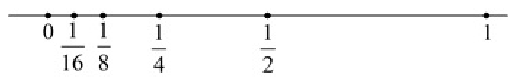
La paradoja de Zenón

El filósofo griego Zenón de Elea (495-435 a. de C.) precipitó una crisis en la Matemática antigua estableciendo algunas paradojas ingeniosas. Una de ellas, llamada frecuentemente la *paradoja del corredor*, se puede exponer de la manera siguiente:

Un corredor no puede alcanzar nunca la meta porque siempre ha de recorrer la mitad de una distancia antes de recorrer la distancia total. Es decir, cuando haya recorrido la primera mitad, tendrá que recorrer la otra mitad. Cuando haya recorrido la mitad de ésta, le quedará todavía la cuarta parte y así sucesiva e indefinidamente.



Zenón pensó, evidentemente, en una situación ideal en la que el corredor es una partícula o punto que se mueve de un extremo a otro de un segmento de recta. Para analizar el razonamiento de Zenón con más detalle se supone que el corredor parte del punto marcado con 1 (ver figura anterior) y corre hacia la meta marcada con 0. Las posiciones indicadas por $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, . . ., etc., señalan la fracción de carrera que se ha de recorrer todavía cuando se alcanza el punto marcado. Estas fracciones (cada una de las cuales es la mitad de la anterior) subdividen todo el trayecto en un número indefinido de partes cada vez más pequeñas. Puesto que para recorrer por separado cada una de estas partes se necesita una cantidad positiva de tiempo, parece natural afirmar que el tiempo necesario para el trayecto total ha de ser la suma total de todas estas cantidades de tiempo. Decir que el corredor nunca puede alcanzar la meta equivale a decir que nunca llega a ella en un tiempo finito; o, dicho de otro modo, que la suma de un número finito de intervalos positivos de tiempo no puede ser finita.

La afirmación de Zenón de que un número ilimitado de cantidades positivas no puede tener suma finita, fue contradicha 2000 años más tarde con la creación de la teoría de series infinitas. En los siglos XVII y XVIII algunos matemáticos empezaron a pensar que era posible extender la idea de suma ordinaria de conjuntos *finitos* de números a conjuntos *infinitos*, de manera que en algunos casos la "suma" de un conjunto de infinitos números sea finita. Para ver cómo se puede hacer esta extensión y tener una idea de las dificultades que pueden presentarse para ello, conviene analizar la paradoja de Zenón con más detalle.

Supongamos que el corredor antes mencionado, corre a *velocidad constante* y que necesita t segundos para la primera mitad del recorrido. Para el siguiente cuarto de recorrido necesitará $\frac{t}{2}$ segundos, para el octavo siguiente $\frac{t}{4}$ segundos y en general para la parte comprendida entre $\frac{1}{2^n}$ y

$\frac{1}{2^{n+1}}$ necesitará $\frac{t}{2^n}$ segundos. La "suma" de todos estos intervalos se puede indicar simbólicamente escribiendo la siguiente expresión:

$$t + \frac{t}{2} + \frac{t}{4} + \ldots + \frac{t}{2^n} + \ldots$$

Este es un ejemplo de las llamadas *series infinitas* y el problema aquí está en decidir si es posible encontrar una forma natural de asignarle un número que se pueda llamar *suma* de la serie.

La experiencia física dice que el corredor que corre a velocidad constante alcanzará su meta en un tiempo doble del que necesitaba para alcanzar su punto medio. Puesto que necesita t segundos para la mitad del recorrido, tendrá que emplear $2t$ segundos para el recorrido completo. Este razonamiento sugiere que se debe asignar la "suma" $2t$ a la serie anterior, esperando que la igualdad

$$t + \frac{t}{2} + \frac{t}{4} + \ldots + \frac{t}{2^n} + \ldots = 2t$$

pueda ser "valida" en algún sentido.

La teoría de las series infinitas precisa cómo se ha de interpretar esta igualdad. La idea es la siguiente: primero se suman un *número finito* de términos, los n primeros, indicando esta suma por $\{s_n\}$. Así se tiene:

$$\{s_n\} = \left\{ t + \frac{t}{2} + \frac{t}{4} + \ldots + \frac{t}{2^{n-1}} \right\}$$

y esta suma se denomina *suma parcial* n-sima o *sucesión de sumas parciales*. Se estudia después el comportamiento de $\{s_n\}$ cuando n toma valores cada vez más grandes. En particular se trata de determinar si la sucesión de sumas parciales $\{s_n\}$ es convergente, es decir, si tiende a un límite finito.

En este caso es fácil ver que el valor límite de las sumas parciales es $2t$. En efecto, calculando algunas de estas sumas parciales se tiene:

$$s_1 = t\,, \quad s_2 = t + \frac{t}{2} = \frac{3}{2}t\,, \quad s_3 = t + \frac{t}{2} + \frac{t}{4} = \frac{7}{4}t\,, \quad s_4 = t + \frac{t}{2} + \frac{t}{4} + \frac{t}{8} = \frac{15}{8}t$$

Se observa que estos resultados se pueden expresar como sigue:

$$s_1 = (2-1)t\,, \quad s_2 = \left(2 - \frac{1}{2}\right)t\,, \quad s_3 = \left(2 - \frac{1}{4}\right)t\,, \quad s_4 = \left(2 - \frac{1}{8}\right)t$$

lo cual conduce a pensar en una fórmula general de la forma

$$\{s_n\} = \left\{ \left(2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) t \right\}, \forall\, n \in \mathbb{N} \qquad (1)$$

La fórmula anterior se comprueba fácilmente por inducción. Puesto que $\{\frac{1}{2^{n-1}}\} \to 0$, resulta que $\{s_n\} \to 2t$. Por tanto, la igualdad anterior es "cierta" si se interpreta que $2t$ es el límite de la *sucesión de sumas parciales* $\{s_n\}$. Este proceso de límite parece invalidar la objeción de Zenón que la suma de un número infinito de intervalos de tiempo no puede ser nunca finita.

Ahora daremos un argumento que proporciona un apoyo considerable al punto de vista de Zenón. Supongamos que en el anterior análisis de la paradoja del corredor se hace un pequeño pero importante cambio. En vez de considerar la velocidad constante, supongamos que decrece gradualmente de manera que necesita t segundos para de 1 a $\frac{1}{2}$, $\frac{t}{2}$ para ir de $\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{4}$, $\frac{t}{3}$ segundos para ir de $\frac{1}{4}$ a $\frac{1}{8}$, y en general $\frac{t}{n}$ segundos para ir de $\frac{1}{2^{n-1}}$ a $\frac{1}{2^n}$. El tiempo total que necesitará para la carrera, vendrá ahora representado por la siguiente serie infinita:

$$t + \frac{t}{2} + \frac{t}{3} + \ldots + \frac{t}{n} + \ldots$$

En este caso, la experiencia física no sugiera ninguna "suma" obvia o natural para asignar a dicha serie y por tanto este ejemplo hay que estudiarlo desde un punto de vista completamente matemático.

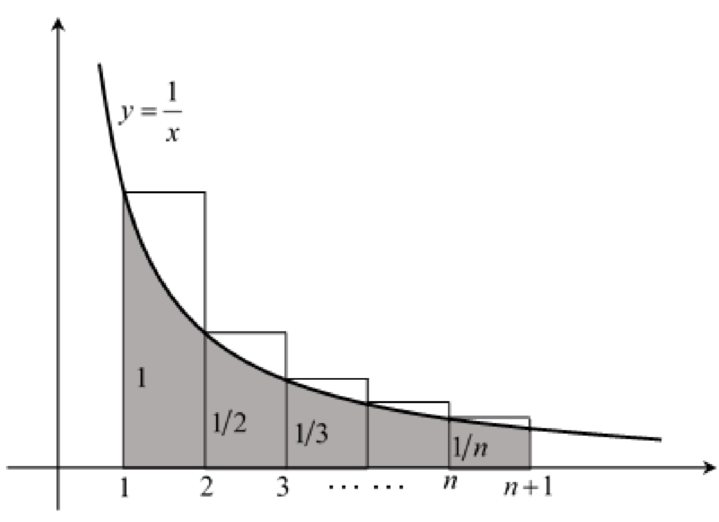
Igual que antes, se introduce la sucesión de sumas parciales $\{s_n\}$, es decir:

$$\{s_n\} = \left\{ t + \frac{t}{2} + \frac{t}{3} + \ldots + \frac{t}{n} \right\} \qquad (2)$$

y se trata de ver qué ocurre a $\{s_n\}$ cuando n crece indefinidamente. Esta suma parcial no es tan fácil de estudiar como la anterior, pues no existe una fórmula análoga a la fórmula (1) que simplifique la expresión del segundo miembro de (2). Sin embargo, por comparación de estas sumas parciales con una integral apropiada se puede ver que toman valores tan grandes como se quiera.

En la figura siguiente se ve parte de la hipérbola $f(x) = \frac{1}{x}$ para $x > 0$. Los rectángulos dibujados, tienen un área total igual a la suma

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$$



El área de la región determinada por la hipérbola y el intervalo $[1, n+1]$ es

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,dx = \ln(n+1)$$

y puesto que esta área no puede exceder la suma de las áreas de los rectángulos, se tiene la desigualdad

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} \geqslant \ln(n+1)$$

Multiplicando ambos miembros por t se obtiene $s_n \geqslant t\ln(n+1)$. Es decir, si la velocidad del corredor decrece tal como se ha indicado anteriormente, el tiempo necesario para alcanzar el punto $\frac{1}{2^n}$ es por lo menos $t\ln(n+1)$ segundos. Puesto que $\ln(n+1)$ al crecer n toma valores tan grandes como se quiera ($\{\ln(n+1)\} \to +\infty$), se cumple en este caso la paradoja de Zenón, es decir, que el corredor no alcanzará la meta en un tiempo finito.

La teoría general de series infinitas hace una distinción entre series como

$$t + \frac{t}{2} + \frac{t}{4} + \ldots + \frac{t}{2^n} + \ldots$$

cuyas sucesión de sumas parciales tiende a un límite finito, y series como

$$t + \frac{t}{2} + \frac{t}{3} + \ldots + \frac{t}{n} + \ldots$$

cuyas sucesión de sumas parciales no tiene límite finito (no es convergente).

Las primeras se denominan *convergentes* y las segundas *divergentes*. Los primeros investigadores en este dominio ponían poca o ninguna atención en las cuestiones de convergencia y divergencia. Trataban las series infinitas como si fueran sumas ordinarias finitas, sujeta a las leyes usuales del Álgebra sin tener en cuenta que estas leyes no pueden extenderse universalmente a las series infinitas. Por eso no es sorprendente que se haya visto más tarde que algunos de los primeros resultados obtenidos fueran incorrectos. Afortunadamente, muchos de aquellos pioneros tenían una intuición y destreza poco frecuentes, que les evitaba llegar a conclusiones falsas, aunque ellos no pudieran justificar sus métodos. Entre los primeros matemáticos que se ocuparon de las series ocupa un lugar preeminente Leonard Euler. Euler descubría fórmula tras fórmula, a cual más interesante, y a la vez utilizaba las series infinitas como concepto unificador de diversas rams de la Matemática que hasta entonces estaban sin relacionar. La gran cantidad de trabajos de Euler que han sobrevivido al paso del tiempo es un tributo a su notabilísimo instinto de los matemáticamente correcto.

La extensión del uso de las series infinitas empezó más tarde en el siglo XVII, cerca de cincuenta años después del nacimiento de Euler, coincidiendo con el principio del desarrollo del Cálculo

Integral, Nicholas Mercator (1620-1687) y William Brouncker (1620-1684) descubrieron en 1668 una serie infinita para el logaritmo al intentar calcular el área de un segmento hiperbólico. Poco después, Newton descubrió la *serie binómica*. Estos descubrimientos constituyen un punto fundamental de la historia de la Matemática. Un caso particular de la serie binómica es el conocido *teorema del binomio* que afirma que:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

donde x es un número real arbitrario, n un entero no negativo, y $\binom{n}{k}$ es el coeficiente binomial. Newton encontró que esta fórmula, válida para valores *enteros* de n se podía extender a exponentes *reales* cualesquiera, sustituyendo la suma finita del segundo miembro, por una serie finita conveniente, si bien no lo demostró. Efectivamente, en un estudio cuidadoso de la serie binomial surgen algunas cuestiones bastante delicadas de convergencia a las que no se podía responder en la época de Newton.

Poco después de la muerte de Euler en 1783, el caudal de nuevos descubrimientos empezó a disminuir y el período formal en las historia de las series llegó a su término. Un nuevo período, y más crítico, empezó en 1812 cuando Gauss publicó la célebre memoria que contenía, por primera vez en la historia, un estudio riguroso de la convergencia de algunas series infinitas. Pocos años más tarde, Cauchy introdujo una definición analítica del concepto del límite en su tratado *Curso de Análisis algebraico* (publicado en 1821), y expuso los fundamentos de la teoría moderna de convergencia y divergencia. Dedicaremos algunos artículos a exponer los aspectos básicos de esta teoría.