Los números naturales. Definición y propiedades

Con la idea de abrir boca para empezar los estudios de matemáticas en bachillerato, en un artículo anterior se hablaba sobre la introducción al número real en la Secundaria Obligatoria. En particular se definía el conjunto de los números naturales, $\mathbb{N}$, como aquel formado por aquellos números que surgen de manera natural por la necesidad que tiene el ser humano de contar. De este modo:

$$\mathbb{N} = \{1,2,3,4,5,\ldots\}$$

Veremos en este artículo cómo definir de manera rigurosa, desde el punto de vista puramente matemático, el conjunto de los números naturales. Veremos el concepto de conjunto inductivo y demostraremos algunas propiedades de los naturales que, a primera vista, parecen evidentes. Así demostraremos, entre otras propiedades, que todo natural es mayor o igual que uno, que la suma y el producto de naturales es otro número natural, que el opuesto de un natural no es natural y que si m y n son números naturales decir que $m-n$ es natural es lo mismo que decir que $n<m$. Para ello haremos uso de otros dos artículos. Uno de ellos, en el que se hablaba sobre la estructura de cuerpo del conjunto de los números reales, y otro, en el que se culminaba el anterior, donde se mostraba que el conjunto de los números reales tiene estructura de cuerpo ordenado conmutativo.

Por último, y antes de comenzar, decir que la fuente utilizada para escribir este artículo ha sido el libro titulado Análisis Matemático I, de Camilo Aparicio del Prado y Rafael Payá Albert (Universidad de Granada). Este fue el libro con el que un servidor comenzó la andadura por este mundo de las matemáticas.

Conjuntos inductivos. Definición del conjunto de los números naturales

Intuitivamente el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales está formado por 1 y todos los números que se obtienen sumando 1 consigo mismo: 1, $1+1$, $1+1+1$,... El ejercicio resuelto número 6 de este artículo justifica que todos son distintos. En particular $\mathbb{N}$ verifica que $1\in\mathbb{N}$ y que si $n\in\mathbb{N}$ entonces $n+1\in\mathbb{N}$. $\mathbb{N}$ debe ser el más pequeño conjunto de números reales de este tipo.

Definición.
Un subconjunto A de $\mathbb{R}$ se llamará *inductivo* si verifica que $1\in A$ y que si $x\in A$ entonces $x+1\in A$.

Por ejemplo $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^+$ son inductivos, mientras que $\mathbb{R}^-$ y $\mathbb{R}^*$ no lo son.

Se define el conjunto $\mathbb{N}$ de los *números naturales* como la intersección de todos los subconjuntos inductivos de $\mathbb{R}$.

Es inmediato que $\mathbb{N}$ es un conjunto inductivo. El hecho de que sea el más pequeño de todos los subconjuntos inductivos de $\mathbb{R}$ se justifica a continuación.

El principio de inducción

Teorema (principio de inducción).
Si A es un conjunto inductivo de números reales y $A \subset \mathbb{N}$, entonces $A = \mathbb{N}$.
Demostración.
Por ser A inductivo se tiene $\mathbb{N} \subset A$, luego $A = \mathbb{N}$.

La utilización usual del anterior teorema es la siguiente. Supongamos que para cada n natural se tiene una cierta afirmación P_n y que se quiere demostrar que P_n es cierta para todo natural n. Para ello basta probar que P_1 es cierta y que de ser cierta P_n se deduce que P_{n+1} es cierta, $\forall n \in \mathbb{N}$. En efecto, sea $A = \{n \in \mathbb{N} : P_n \text{ es cierta}\}$, puesto que P_1 es cierta se tiene que $1 \in A$ y como P_n es cierta implica que P_{n+1} es cierta, si $n \in A$ se deduce que $n + 1 \in A$, luego A es inductivo y como $A \subset \mathbb{N}$, concluimos por el teorema anterior que $A = \mathbb{N}$. Este razonamiento se conoce como demostración por inducción.

En el siguiente resultado se resumen las propiedades más inmediatas de los números naturales.

Corolario.

i) $1 \leqslant n, \forall n \in \mathbb{N}$.

ii) Si m y n son números naturales, entonces $m + n$ y mn también lo son.

iii) Si n es un número natural, $-n$ no es natural. Si n es natural y $\dfrac{1}{n}$ es natural, entonces $n = 1$.

Demostración.

i) El conjunto $\{x \in \mathbb{R} : 1 \leqslant x\}$ es inductivo, luego incluye a $\mathbb{N}$.

ii) Tómese m un natural fijo, pero arbitrario y sean los conjuntos $A = \{n \in \mathbb{N} : m + n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{n \in \mathbb{N} : mn \in \mathbb{N}\}$. Es muy fácil demostrar que A y B son inductivos (¿te atreves?). Por tanto $A = \mathbb{N}$ y $B = \mathbb{N}$, tal y como se quería demostrar.

iii) Si $n \in \mathbb{N}$ se tiene por i) que $0 < 1 \leqslant n$, luego $-n < 0$ y así $-n$ no es natural; también si $n \neq 1$ se tiene que $1 < n$, luego $\dfrac{1}{n} < 1$ y $\dfrac{1}{n}$ es un real no natural por i).

Más propiedades del conjunto de los números naturales

Lema.
Si $n \in \mathbb{N}$ y $n \neq 1$, entonces $n - 1 \in \mathbb{N}$.
Demostración.
Supongamos que $n - 1 \notin \mathbb{N}$ y sea $A = \mathbb{N} - \{n\}$. Como $n \neq 1$ se tiene que $1 \in A$. Si $x \in A$ se tiene que $x \in \mathbb{N}$, luego $x + 1 \in \mathbb{N}$ ($\mathbb{N}$ es inductivo); además como hemos supuesto que $n - 1 \notin \mathbb{N}$, se tiene también que $x + 1 \neq n$ (¿por qué?). Así $x + 1 \in A$, y hemos demostrado que A es un conjunto inductivo. Se tiene entonces $A = \mathbb{N}$ lo cual es absurdo pues n es natural y no pertenece a A. Por tanto $n - 1 \in \mathbb{N}$ como queríamos demostrar.

Proposición.
Dados dos números naturales m y n se tiene:

$$n < m \Leftrightarrow m - n \in \mathbb{N}$$

Demostración.
$\Rightarrow$) Sea $A = \{n \in \mathbb{N} : m - n \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n < m\}$. Por el lema anterior se tiene que $1 \in A$. Queremos probar que si $n \in A$, entonces $n + 1 \in A$. Sea $n \in A$ y sea m un natural verificando $n + 1 < m$; al ser $n < m$, deducimos por la hipótesis de inducción que $m - n \in \mathbb{N}$. Si fuese $m - n = 1$, sería $n + 1 = m$ y hemos supuesto $n + 1 < m$; así $m - n$ es un número natural distinto de 1 y aplicando el lema anterior obtenemos que $m - (n + 1) = (m - n) - 1 \in \mathbb{N}$, es decir, $n + 1 \in A$. Hemos probado que A es inductivo, luego $A = \mathbb{N}$. Queda así probado que si m y n son dos naturales cualesquiera verificando $n < m$, entonces $m - n \in \mathbb{N}$.
$\Leftarrow$) Si $m - n \in \mathbb{N}$ es natural, tenemos que $m - n \geqslant 1$ de donde se deduce $m > n$.

La proposición anterior es una caracterización algebraica del orden de los naturales.

Corolario.
Si m y n son números naturales verificando $n < m$, entonces $n + 1 \leqslant m$.
Demostración.
Por la proposición anterior $m - n$ es un número natural, luego mayor o igual que 1.

El corolario anterior afirma que si n es un número natural, no existe ningún número natural comprendido estrictamente entre n y $n+1$. Esta propiedad se enuncia a veces diciendo que el orden de $\mathbb{N}$ es *discreto*.

Finalmente obtendremos un resultado de extraordinaria importancia relativo a los conjuntos de números naturales; para poder enunciarlo necesitamos introducir un nuevo concepto.

Principio de la buena ordenación de los naturales

Definición.
Se dice que un conjunto A de números reales tiene *máximo* si existe un número real $x \in A$ tal que $x \geqslant a, \forall a \in A$. Es inmediato que el elemento x es único, se denomina máximo del conjunto A y se nota $\max A$. Análogamente, diremos que A tiene *mínimo* si existe un número real $y \in A$ tal que $y \leqslant a, \forall a \in A$. Es igualmente inmediato que y es único, se le llama mínimo de A y se le nota $\min A$.

Resaltamos que un conjunto de números reales puede no tener ni máximo ni mínimo. El siguiente resultado asegura la existencia de mínimo en determinadas circunstancias.

Teorema*.*
Todo conjunto no vacío de números naturales tiene mínimo.
Demostración.
Sea $A \subset \mathbb{N}$, A no vacío. Si $1 \in A$ no hay nada que demostrar pues entonces $1 = \min A$ (ver apartado i) del primer corolario de este artículo). Supongamos que $1 \notin A$ y sea $B = \{n \in \mathbb{N} : n < a, \forall a \in A\}$. Claramente $1 \in B$. Si B fuese inductivo, sería $B = \mathbb{N}$ y como consecuencia A sería vacío, luego B no es inductivo y por tanto $\exists\, n \in B$ tal que $n+1 \notin B$. Por el corolario anterior se tiene $n+1 \leqslant a, \forall a \in A$ y como $n+1 \in A$, pues en otro caso $n+1$ pertenecería a B, concluimos que $n+1 = \min A$.

Por último vamos a definir y a obtener las propiedades básicas de las potencias de exponente natural.

Definición.
Para todo número real x se definen las *potencias de exponente natural* de x de la siguiente manera:

$$x^1 = x$$

$$x^{n+1} = x^n x\,, \forall\, n \in \mathbb{N}$$

En otras palabras: $x^1 = x$, $x^2 = xx$, $x^3 = x^2x$ y así "sucesivamente".

La siguiente proposición resume las propiedades esenciales.

Proposición.

i) $x^{n+m} = x^n x^m \,, \forall\, m, n \in \mathbb{N}$.

ii) $(x^n)^n = x^{nm} \,, \forall\, m, n \in \mathbb{N}$.

iii) Si $1 < x$ y $m, n \in \mathbb{N}$, entonces $n < m \Leftrightarrow x^n < x^m$.

Demostración.

i) Sea $m \in \mathbb{N}$ y sea $A = \{n \in \mathbb{N} : x^{m+n} = x^m x^n\}$. Por definición de potencia de exponente natural se tiene $1 \in A$. Si $n \in A$ se tiene $x^{m+n+1} = x^{m+n}x = (x^m x^n)x = x^m(x^n x) = x^m x^{n+1}$. Así, A es inductivo, luego $A = \mathbb{N}$ como queríamos demostrar.

ii) Similar a i).

iii) Sea $1 < x$. Como el conjunto $B = \{n \in \mathbb{N} : 1 < x^n\}$ es inductivo, tenemos que $1 < x^n \,, \forall\, n \in \mathbb{N}$. Si $n < m$, sabemos que $m - n \in \mathbb{N}$ y por tanto $1 < x^{m-n}$, luego $x^n < x^m$. Recíprocamente, supongamos que $x^n < x^m$ y que $m \leqslant n$; entonces por lo ya demostrado $x^m \leqslant x^n$, lo cual es una contradicción.