Los números irracionales

En las matemáticas de la Educación Secundaria Obligatoria se presentan los números irracionales como aquellos que no son racionales, es decir, aquellos que no se pueden poner en forma de fracción. Como es muy habitual hablar de la expresión decimal de una fracción (que es o bien decimal exacta o bien decimal periódica), se dice también de los irracionales que tienen una expresión decimal infinita no periódica, o sea, que tienen infinitas cifras decimales que no forman período. De este modo, es fácil construir números de este tipo, por ejemplo:

$$1,234567891011121314151617181920\ldots \quad ; \quad 0,100110001110000111100000 11111\ldots$$

Sin embargo, el ejemplo clásico de número irracional es la raíz de dos. Vamos, el número cuyo cuadrado es dos. En las matemáticas de la Educación Secundaria Obligatoria se da por hecho que es un número irracional, es decir, un número con infinitas cifras decimales que no forman período. Una calculadora cualquiera da una aproximación de la raíz de dos con bastantes cifras significativas.

Dedicaremos nuestro esfuerzo en este artículo a ir un poco más allá: demostraremos que, efectivamente, no hay ningún número racional cuyo cuadrado sea dos y, a partir de ahí, nos preguntaremos por la existencia de los números irracionales. Es decir, no daremos por hecho que todo número que no sea racional es un número real, sino que lo demostraremos. Es la manía de los matemáticos de demostrar las cosas, siempre que se pueda. Y se puede.

Ya habíamos comentado en un artículo anterior, dedicado al axioma del supremo, que una consecuencia de tal axioma es que nos permitirá probar la existencia de *números irracionales*. Es decir, de números reales que no son racionales (o, más comúnmente, que no son fracciones). Recordemos que el conjunto $\mathbb{Q}$ de los racionales se define de la siguiente forma:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{n} \ : \ p \in \mathbb{Z} \, , \, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Recordemos también que fuimos capaces de demostrar que no existe ningún número racional cuyo cuadrado es dos. De todos modos volveremos a demostrarlo a continuación.

Para ello supongamos, razonando por reducción al absurdo, que existe $x \in \mathbb{Q}$ tal que $x^2 = 2$, es decir, que $x = \dfrac{m}{n}$, donde m y n son naturales y que la fracción $\dfrac{m}{n}$ es irreducible, es decir, una fracción en la que $\text{mcd}(m, n) = 1$ (tomar una fracción irreducible no limita la demostración, ya que si no lo fuera habría otra fracción equivalente que sí que lo sería y podríamos tomar esta última como la fracción cuyo cuadrado sea dos, objeto de nuestra demostración). Completemos ahora la demostración:

$$x = \frac{m}{n} \Rightarrow x^2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2 \Rightarrow 2 = \frac{m^2}{n^2} \Rightarrow m^2 = 2n^2$$

De lo anterior deducimos que m^2 es par (el doble de cualquier número siempre es par), con lo que m también es par (¿te atreves a demostrar que si el cuadrado de un número natural es par entonces el número en cuestión también lo es?) Por tanto existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $m = 2k$. Sustituyendo tenemos:

$$(2k)^2 = 2n^2 \Rightarrow 4k^2 = 2n^2 \Rightarrow 2k^2 = n^2$$

De la misma forma que anteriormente, deducimos ahora que n^2 es par y que, por tanto, n también lo es. Hemos demostrado entonces que m y n son ambos números pares, pero esto entra en contradicción con el hecho supuesto de que la fracción $\dfrac{m}{n}$ sea irreducible, pues siendo tanto m como n números pares la fracción se podría reducir aún más (dividiendo entre dos).

La contradicción anterior demuestra que x tal que $x^2 = 2$ no es racional. Debemos suponer que será un número, pero no racional. Tenemos entonces, presumiblemente, el derecho a suponer que hay números reales que no son racionales, es decir, que "esa cosa" cuyo cuadrado es dos es de verdad un número pero no racional... Aclaremos esto un poco más e intentemos seguir el razonamiento (ya, ya sé que los matemáticos somos un poco retorcidos). A ver, el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales tiene la misma estructura que el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales: es un cuerpo ordenado conmutativo. Es decir, que los conjuntos $\mathbb{R}$ y $\mathbb{Q}$ serían indistinguibles, incluso podrían ser el mismo. Esto, de momento, nos obliga a no poder afirmar la existencia de números reales que no sean racionales. Puesto que hemos encontrado "algo" que no es racional, debemos demostrar que realmente es un número real, es decir, que existen *números irracionales*, o lo que es lo mismo, números reales que no son racionales. Sólo podremos hacerlo con la ayuda del axioma del supremo (de aquí se explica la necesidad de introducir este último axioma para completar la estructura del conjunto de los números reales).

Demostremos pues la existencia de números irracionales. Hemos de insistir en que la demostración hace uso del axioma del supremo y, además, hace uso de las desigualdades de una forma bastante técnica. Pero merece la pena intentar seguirla. Es, por tanto, fundamental leer y comprender con claridad todo lo que se dijo antes y después de enunciar el axioma del supremo, en el artículo dedicado al mismo y ya mencionado en más de una ocasión, pues se hará uso con profusión de todo ello.

Finalmente, aprovecharemos también para demostrar otro par de resultados que demostrarán la abundancia de racionales e irracionales y nos harán reflexionar sobre si hay más irracionales que racionales.

Proposición.
Existe un número real y positivo α tal que $\alpha^2 = 2$.
Demostración.
Sea $A = \{x \in \mathbb{R}_0^+ \ : \ x^2 < 2\}$. Un inciso: $\mathbb{R}_0^+$ es la semirrecta $[0, +\infty)$. A es no vacío ($1 \in A$) y si $x \in A$ tenemos $x^2 < 2 < 2^2$ de donde usado que $x \geqslant 0$ se deduce fácilmente que $x < 2$. Por tanto A está mayorado; sea $\alpha = \sup A$. Claramente $\alpha \geqslant 1$ y queda probar que $\alpha^2 = 2$.
Sea n un natural arbitrario. Como $\alpha + \dfrac{1}{n} > \alpha$, tenemos que $\alpha + \dfrac{1}{n} \notin A$, esto es

$$2 \leqslant \left(\alpha + \frac{1}{n}\right)^2 = \alpha^2 + \frac{2\alpha}{n} + \frac{1}{n^2} \leqslant \alpha^2 + \frac{2\alpha + 1}{n}$$

obteniéndose

$$\frac{2 - \alpha^2}{2\alpha + 1} \leqslant \frac{1}{n}$$

Por otra parte, al ser $\alpha - \dfrac{1}{n} < \alpha$ tenemos, por definición de supremo, que existe $x \in A$ verificando que $\alpha - \dfrac{1}{n} < x$, pero como $\alpha - \dfrac{1}{n} \geqslant 0$ también se tiene que $\left(\alpha - \dfrac{1}{n}\right)^2 < x^2$ y por tanto que $\left(\alpha - \dfrac{1}{n}\right)^2 < 2$. Así pues

$$2 > \left(\alpha - \frac{1}{n}\right)^2 = \alpha^2 - \frac{2\alpha}{n} + \frac{1}{n^2} > \alpha^2 - \frac{2\alpha}{n}$$

de donde $\dfrac{\alpha^2 - 2}{2\alpha} < \dfrac{1}{n}$ y con mayor motivo

$$\frac{\alpha^2 - 2}{2\alpha + 1} < \frac{1}{n}$$

En resumen, si notamos $\beta = \dfrac{|\alpha^2 - 2|}{2\alpha + 1}$, se tiene $\beta \leqslant \dfrac{1}{n}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Si fuese $\beta \neq 0$ existiría, por el principio de Arquímedes, un natural n_0 tal que $\dfrac{1}{\beta} < n_0$, es decir, $\beta > \dfrac{1}{n_0}$, lo que es una contradicción. Así pues $\beta = 0$ y $\alpha^2 = 2$.

Puesto que, tal y como hemos demostrado más arriba, no existe ningún número racional cuyo cuadrado sea 2, deducimos que el número real α, que aparece en la proposición anterior, es un real no racional, es decir, un irracional.

Si tenemos en cuenta que la suma de un racional y un irracional es irracional y que el producto de un racional no nulo por un irracional es también irracional (¿serías capaz de comprobar ambas afirmaciones?: ánimo no es difícil), la abundancia de números irracionales está asegurada; de hecho se tiene el siguiente resultado al respecto, en el que se demuestra que hay siempre un irracional entre dos números reales, por cerca que estos dos últimos se encuentren.

Proposición.
Dados dos números reales, x e y, verificando $x < y$, existe siempre un número irracional β tal que $x < \beta < y$.
Demostración.
Si uno de los números es racional y el otro irracional, basta tomar $\beta = \dfrac{x+y}{2}$. Si los dos son irracionales sea $z = \dfrac{x+y}{2}$; puede ocurrir que z sea irracional, y bastará tomar $\beta = z$, o que z sea racional, en cuyo caso tomaremos $\beta = \dfrac{x+z}{2}$. Queda considerar el caso en que x e y son racionales. Sea α el número racional dado por la proposición anterior. Puesto que $1 < \alpha$ se tiene $0 < \dfrac{1}{\alpha} < 1$, y basta tomar $\beta = x + \dfrac{y-x}{\alpha}$.

A pesar de la abundancia de irracionales, igualmente, demostraremos que también hay un racional entre dos reales cualesquiera o equivalentemente, que todo número real puede "aproximarse" por racionales.

Teorema (Densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$).
Dados dos números reales, x e y, verificando $x < y$, existe un número racional r tal que $x < r < y$.
Demostración.
Supongamos primeramente que $0 \geqslant x$. Por el Principio de Arquímedes existe un natural n_0 tal que $1 < n_0(y-x)$ y por tanto $\dfrac{1}{n_0} < y - x$. Sea $m_0 = \min\{m \in \mathbb{N} \ : \ n_0x < m\}$ (por el propio Principio de Arquímedes el conjunto $\{m \in \mathbb{N} \ : \ n_0x < m\}$ es no vacío y por el principio de buena ordenación de los naturales tiene mínimo). Veamos que $m_0 - 1 \leqslant n_0x$. Si $m_0 \neq 1$, es $m_0 - 1$ natural y por tanto $m_0 - 1 \notin \{m \in \mathbb{N} \ : \ n_0x < m\}$. Si $m_0 = 1$, se tiene $m_0 - 1 = 0 \leqslant n_0x$ (hemos supuesto

que x es positivo). Se tiene entonces

$$x < \frac{m_0}{n_0} = \frac{m_0 - 1}{n_0} + \frac{1}{n_0} \leqslant x + \frac{1}{n_0} < x + (y - x) = y$$

y basta tomar $r = \dfrac{m_0}{n_0}$.
Supongamos ahora que $x < 0$. Si $y > 0$ podemos tomar $r = 0$ y si $y \leqslant 0$, por la primera de la demostración existe un racional s tal que $-y < s < -x$, y basta tomar $r = -s$.

Los dos últimos resultados sugieren que nos preguntemos si hay más racionales que irracionales o viceversa. Hay un resultado en matemáticas que demuestra que hay más irracionales que racionales, pero esto será motivo de otro estudio en el que las matemáticas se adentran en el tortuoso camino de los conjuntos infinitos. Y aquí es donde matemáticas y filosofía, filosofía y matemáticas comienzan a darse la mano.

Por cierto, en este otro artículo se demuestra que el conocido y famoso número e también es irracional.

Incluimos finalmente un par de propiedades más que se podrían proponer como ejercicio.

1. Sean a, b, c, d números racionales verificando $c^2 + d^2 \neq 0$, y sea x un número irracional. ¿Qué condición deben cumplir a, b, c y d para que el número $\frac{ax+b}{cx+d}$ sea racional?

   Solución.

   Supongamos que $\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{p}{n}$, con $p \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$. Entonces

   $$(ax + b)n = (cx + d)p \Rightarrow axn + bn = cx + dp \Rightarrow x(an - cp) = dp - bn$$

   Como el producto de un irracional por un racional no nulo es irracional, debemos de concluir que $an - cp = 0$ y $dp - bn = 0$, lo que significa que $\frac{p}{n} = \frac{a}{c}$ y $\frac{p}{n} = \frac{b}{d}$. Luego la condición para que el número $\frac{ax+b}{cx+d}$ sea racional es que $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, o lo que es lo mismo, $ad - bc = 0$ (obsérvese que, como $c^2 + d^2 \neq 0$, c y d son ambos distintos de cero).

2. Probar que si x es un número real se verifican:

   i) $x = \sup\{r \in \mathbb{Q} : r < x\} = \text{ínf}\{r \in \mathbb{Q} : r > x\}$.

   ii) $x = \sup\{\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} : \alpha < x\} = \text{ínf}\{r \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} : \alpha > x\}$.

   Solución.

i) Sea $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Entonces, por la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, existen dos números racionales r_1, r_2 tal que $x - \varepsilon < r_1 < x < r_2 < x + \varepsilon$. Por tanto, por la caracterización de supremo e ínfimo se tiene el resultado: $x = \sup\{r \in \mathbb{Q} : r < x\} = \text{ínf}\{r \in \mathbb{Q} : r > x\}$.

ii) Sea $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Entonces, por la densidad de $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, existen $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ tal que $x - \varepsilon < \alpha_1 < x < \alpha_2 < x + \varepsilon$. Por tanto, por la caracterización de supremo e ínfimo se tiene el resultado: $x = \sup\{\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} : \alpha < x\} = \text{ínf}\{r \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} : \alpha > x\}$.