Funciones continuas e inyectivas

Nuestro último teorema afirmaba que toda función continua en un intervalo cerrado y acotado tiene máximo y mínimo absolutos, pero nada nos informa sobre los puntos en los que se alcanzan. Bajo la hipótesis adicional de que la función es inyectiva vamos a ver enseguida que el máximo y el mínimo se alcanzan en los extremos del intervalo, pero esto no es más que el punto de partida para resultados más importantes.

Lema 1.

Sean a y b números reales con $a < b$, sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua e inyectiva y supongamos que $f(a) < f(b)$. Entonces, para todo número real t verificando $a < t < b$ se tiene que $f(a) < f(t) < f(b)$.

Demostración.

Sea $t \in (a, b)$ y supongamos, razonando por reducción al absurdo, que se tenga $f(t) < f(a)$. Entonces, podemos aplicar el teorema del valor intermedio a la restricción de f al intervalo $[t, b]$, que es una función continua, obteniendo un punto c del intervalo $[t, b]$ tal que $f(c) = f(a)$; por ser f inyectiva tenemos $c = a$ y $a \geqslant b$, lo cual es absurdo.

Si suponemos $f(t) > f(b)$ y aplicamos el teorema del valor intermedio a la restricción de f al intervalo $[a, t]$, obtenemos un punto d del intervalo $[a, t]$ tal que $f(d) = f(b)$, con lo que, otra vez, por ser f inyectiva tenemos $b = d \leqslant t$ lo que también es absurdo.

Hemos probado así que $f(a) \leqslant f(t) \leqslant f(b)$, pero, siendo f inyectiva, ambas desigualdades han de ser estrictas, como queríamos demostrar.

Nótese que el lema anterior puede aplicarse sucesivamente. Si $c \in (a, b)$, tenemos, según el lema, $f(a) < f(c) < f(b)$, pero podemos volver a aplicar el lema a las restricciones de f a los intervalos $[a, c]$ y $[c, b]$, obteniendo que

$$a < x < c < y < b \Rightarrow f(a) < f(x) < f(c) < f(y) < f(b)$$

y así sucesivamente. Observamos entonces que f tiene un comportamiento muy concreto, crece al crecer la variable. Este comportamiento se obtendrá de manera rigurosa en el próximo teorema, incluso en un ambiente más general, pero necesitamos concretar algunos conceptos para el enunciado de dicho teorema.

Definición.

Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función real de variable real. Diremos que f es *creciente* (respectivamente, *decreciente*) cuando para cualesquiera dos puntos de A, x e y, en la situación $x < y$, se tenga

$f(x) \leqslant f(y)$ (respectivamente, $f(x) \geqslant f(y)$). Nótese que las anteriores definiciones extienden a las dadas para sucesiones de números reales. Diremos que f es *estrictamente creciente* (respectivamente, *estrictamente decreciente*), cuando para cualesquiera dos puntos, x e y, de A, en la situación $x < y$, se tenga $f(x) < f(y)$ (respectivamente, $f(x) > f(y)$). Finalmente, diremos que f es *monótona* cuando sea creciente o decreciente y *estrictamente monótona* cuando sea estrictamente creciente o estrictamente decreciente.

Nótese que toda función estrictamente monótona es inyectiva, de hecho, una función monótona es estrictamente monótona si y sólo si es inyectiva. El recíproco de la primera afirmación anterior no es cierto. Por ejemplo, la función $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad 0 \leqslant x < 1 \\ 3 - x & \text{si} \quad 1 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$$

es inyectiva pero no es estrictamente monótona.

Teorema 1.

Sea I un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua e inyectiva. Entonces f es estrictamente monótona.

Demostración.

Supongamos primeramente que I es un intervalo cerrado y acotado $[a,b]$, con $a < b$ (si $a = b$ no hay nada que demostrar). Supongamos también que $f(a) < f(b)$ (no puede ser $f(a) = f(b)$ por ser f inyectiva). Sean $x, y \in [a,b]$, con $x < y$. Si $x = a$ se tiene, aplicando el lema anterior, $f(x) < f(y)$, e igual ocurre si $y = b$. Sean entonces $x, y \in (a,b)$; aplicando el lema anterior tenemos $f(x) < f(b)$ y aplicando otra vez el lema a la restricción de f al intervalo $[x,b]$ obtenemos $f(x) < f(y) < f(b)$. Así pues hemos probado en este caso que f es estrictamente creciente. Si fuese $f(a) > f(b)$, el razonamiento anterior, aplicado a la función $-f$, demuestra que $-f$ es estrictamente creciente, de donde f es estrictamente decreciente. Queda así demostrado el teorema en el caso particular de que I esa un intervalo cerrado y acotado.

Sea ahora I un intervalo cualquiera y supongamos que f no es estrictamente monótona, para llegar a una contradicción. Entonces existen x_1, y_1, x_2, $y_2 \in I$ tales que $x_1 < y_1$, $f(x_1) > f(y_1)$, $x_2 < y_2$, $f(x_2) < f(y_2)$. Sean $a = \text{mín}\{x_1, x_2\}$ y $b = \text{máx}\{y_1, y_2\}$; claramente $[a,b] \subset I$ y la restricción de f a $[a,b]$ es continua en inyectiva, luego por lo ya demostrado, es estrictamente monótona. Ello es absurdo pues x_1, y_1, x_2, $y_2 \in [a,b]$.

Como se dijo anteriormente, una función estrictamente monótona es siempre inyectiva. Sin embargo, una función estrictamente monótona no tiene por qué ser continua. Por ejemplo, la función

$g : [0,2] \to \mathbb{R}$

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1+x & \text{si} \quad 1 < x \leqslant 2 \end{cases}$$

es estrictamente creciente y no es continua. Damos a continuación un importante teorema que garantiza la continuidad de una función monótona con una hipótesis adicional.

Teorema 2.

Sea A un conjunto no vacío de números reales y $f : A \to \mathbb{R}$ una función monótona tal que $f(A)$ es un intervalo. Entonces f es continua.

Demostración.

Supongamos por ejemplo que f es creciente. Sea x_0 un punto de A y $\{x_n\}$ una sucesión creciente de puntos de A, convergente a x_0. Para cada natural n se tiene entonces $x_n \leqslant x_{n+1} \leqslant x_0$ y, por ser f creciente, $f(x_n) \leqslant f(x_{n+1}) \leqslant f(x_0)$. Así, $\{f(x_n)\}$ es una sucesión creciente y mayorada, luego convergente (véase el teorema 1 del artículo dedicado a las sucesiones monótonas). Sea $l = \lim f(x_n)$; por ser $f(x_n) \leqslant f(x_0)\,, \forall\, n \in \mathbb{N}$, se tendrá $l \leqslant f(x_0)$ (ver el corolario 3 del artículo dedicado a las sucesiones acotada y a las propiedades de las sucesiones convergentes). Supongamos que fuese $l < f(x_0)$ y sea $\frac{l+f(x_0)}{2} = y$; se tiene $f(x_n) < y < f(x_0)\,, \forall\, n \in \mathbb{N}$. Por ser $f(A)$ un intervalo, existirá un punto x en A tal que $f(x) = y$. Si fuese $x < x_n$ para algún natural n, se tendría, por ser f creciente, que $y = f(x) \leqslant f(x_n)$, cosa que no ocurre, luego $x \geqslant x_n$ para todo natural n. Entonces $x \geqslant x_0$, de donde $f(x) \geqslant f(x_0)$, lo cual es una contradicción. Así, $L = f(x_0)$ y $\{f(x_n)\} \to f(x_0)$, como queríamos.

Un razonamiento enteramente análogo al anterior nos demostraría que si $\{x_n\}$ es una sucesión decreciente de puntos de A, convergente a x_0, entonces $\{f(x_n)\}$ converge a $f(x_0)$. Así pues, para toda sucesión $\{x_n\}$ monótona, de puntos de A, convergente a x_0 se tiene que $\{f(x_n)\}$ converge a $f(x_0)$. Por la caracterización de la continuidad, f es continua en x_0 y, como x_0 era un punto arbitrario de A, f es continua en A.

Finalmente, si f es decreciente, $-f$ es creciente y $(-f)(A) = \{-y : y \in f(A)\}$ es, claramente, un intervalo, luego, por lo ya demostrado $-f$ es continua, esto es, f es continua.

Lema 2.

Si $f : A \to \mathbb{R}$ es una función estrictamente creciente (respectivamente, estrictamente decreciente), entonces $f^{-1} : f(A) \to \mathbb{R}$ es también estrictamente creciente (respectivamente, estrictamente decreciente).

Demostración.

Sean $x\,, y \in f(A)$ con $x < y$. Si fuese $f^{-1}(x) \geqslant f^{-1}(y)$, se tendría, por ser f creciente, $f(f^{-1}(x)) \geqslant f(f^{-1}(y))$, esto es, $x \geqslant y$, contra lo supuesto. Luego $f^{-1}(x) < f^{-1}(y)$ y f^{-1} es estrictamente creciente. Análogo razonamiento se usa para demostrar el caso en que f sea estrictamente decreciente.

Corolario 1.
Sea I un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ una función estrictamente monótona. Entonces f^{-1} es continua.
Demostración.
Por el lema anterior, f^{-1} es monótona y su imagen es el intervalo I, luego f^{-1} es continua por el teorema 2.

Corolario 2.
Sea I un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua e inyectiva. Entonces f^{-1} es continua.
Demostración.
Por el teorema 1, f es estrictamente monótona luego, por el corolario anterior, f^{-1} es continua.

Ejercicios.

1. Sea $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \frac{2x}{1+|x|}\,,\forall\, x \in [-1,1]$$

Determínese la imagen de f.

Solución.

La función también la podemos escribir así:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{1-x} & \text{si} \quad -1 \leqslant x < 0 \\ \dfrac{2x}{1+x} & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

Las restricciones de f a los intervalos $[-1,0)$ y $[0,1)$ son claramente continuas por ser funciones racionales. Así, f es continua en todo punto excepto, eventualmente, en cero. Pero si $\{x_n\}$ es una sucesión de puntos de $[-1,1]$ convergente a cero, cualquiera de las sucesiones $\{\frac{2x_n}{1-x_n}\}$, $\{\frac{2x_n}{1+x_n}\}$ también convergen a cero. Por tanto, f es continua en todo punto del intervalo $[-1,1]$.

Sea ahora $x\,,y \in [-1,0)$. Entonces

$$f(x) = f(y) \Leftrightarrow \frac{2x}{1-x} = \frac{2y}{1-y} \Leftrightarrow 2x(1-y) = 2y(1-x) \Leftrightarrow x - xy = y - yx \Leftrightarrow x = y$$

De la misma forma, dados $x, y \in [0,1]$ se tiene que

$$f(x) = f(y) \Leftrightarrow \frac{2x}{1+x} = \frac{2y}{1+y} \Leftrightarrow 2x(1+y) = 2y(1+x) \Leftrightarrow x + xy = y + yx \Leftrightarrow x = y$$

Lo anterior demuestra que las restricciones de f a los intervalos $[-1,0)$ y $[0,1)$ son inyectivas, luego ambas estrictamente monótonas (teorema 1). Pero $f(-1) = -1$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Esto indica que f es estrictamente creciente en el intervalo $[-1,1]$ y que la imagen de la función f es también el intervalo $[-1,1]$.

2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua en $\mathbb{R}$. Probar que si la restricción de f a $\mathbb{Q}$ es monótona, entonces f es monótona.

   Solución.

   Supongamos que la restricción de f a $\mathbb{Q}$ es creciente. Sean $x, y \in \mathbb{R}$ en la situación $x < y$. Entonces existen sucesiones $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ convergentes a x e y respectivamente y cumpliendo que $x_n, y_n \in \mathbb{Q}, x_n < x < y < y_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Entonces $f(x_n) \leqslant f(y_n), \forall n \in \mathbb{N}$. Al ser f continua, la restricción de f a $\mathbb{Q}$ también lo es y por tanto $\{f(x_n)\} \to f(x)$ y $\{f(y_n)\} \to f(y)$. Entonces $f(x) \leqslant f(y)$ (ver proposición 5 del artículo dedicado a las sucesiones acotadas y a las propiedades de las sucesiones convergentes) y, por tanto, f es creciente.

3. Sea I un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ una función inyectiva. Analícese la relación entre las siguientes afirmaciones.

   i) f es continua.

   ii) $f(I)$ es un intervalo.

   iii) f es estrictamente monótona.

   iv) f^{-1} es continua.

   Solución.

   i) $\Rightarrow$ ii) por el teorema del valor intermedio.

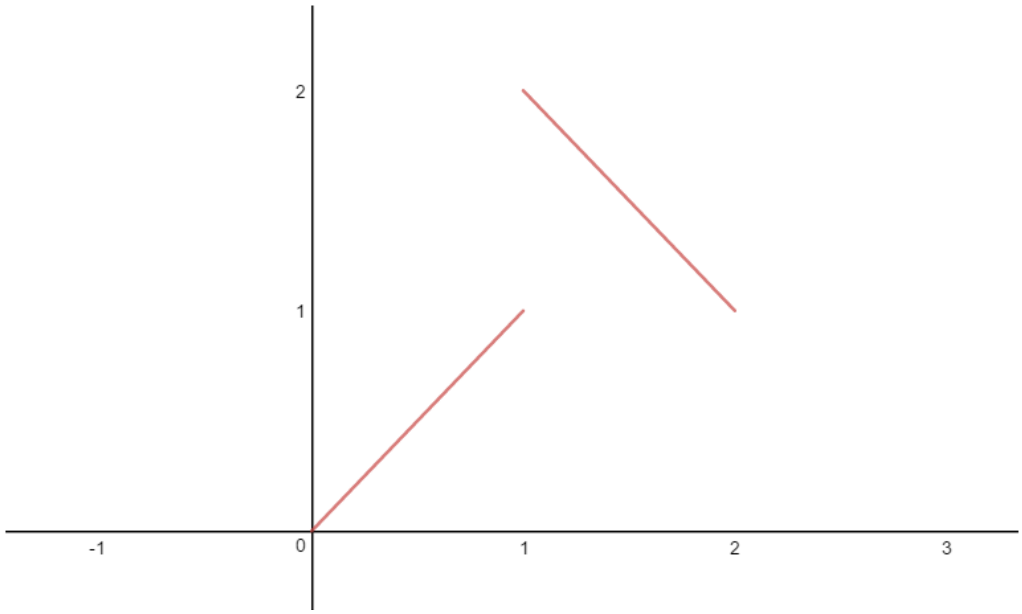
   i) $\Rightarrow$ iii) por el teorema 1.

   i) $\Rightarrow$ iv) por el corolario 2.

   La afirmación ii) no implica necesariamente la i) pues la función $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad 0 \leqslant x < 1 \\ 3 - x & \text{si} \quad 1 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$$

es inyectiva y su imagen es el intervalo $[0,2]$, pero no es continua en $x_0 = 1$ (ver figura siguiente).



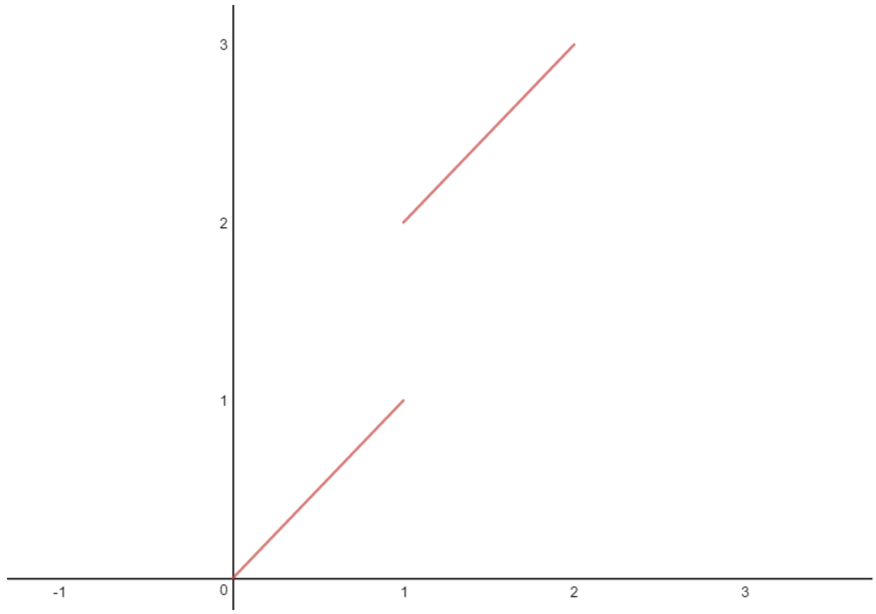
La afirmación ii) no implica necesariamente la iii). La misma función anterior puede servir de contraejemplo.

La afirmación ii) tampoco implica la iv) y sigue sirviendo la misma función anterior como contraejemplo. Es fácil comprobar que $f^{-1} = f$, que no es continua en $x_0 = 1$.

De iii) no se deduce i). La función $g : [0,2] \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad 0 \leqslant x < 1 \\ 1 + x & \text{si} \quad 1 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$$

es estrictamente creciente (luego inyectiva) y no es continua en el punto $x_0 = 1$ (ver figura siguiente).



De iii) tampoco se deduce ii) y la misma función anterior sirve de contraejemplo: obsérvese que la imagen de la función g es el conjunto $[0,1] \cup [2,3]$, que no es un intervalo.

iii) $\Rightarrow$ iv) por el corolario 1.

La afirmación iv) no implica ninguna de las afirmaciones anteriores.

De las afirmaciones ii) y iii) se deduce la afirmación i) por el teorema 2 y, por tanto, también la afirmación iv), pues i) $\Rightarrow iv)$.

De las afirmaciones ii) y iv) se deduce la afirmación i) pues si f es inyectiva también lo es f^{-1} y al ser ésta continua y estar definida en $f(I)$, que es un intervalo, se tiene que la inversa de f^{-1}, o sea f, es continua (corolario 1). De estas dos afirmaciones se deduce también iii) ya que i) $\Rightarrow$ iii).

De iii) y iv) no se deduce necesariamente ni i) ni ii).