Funciones continuas. Definición y propiedades

Para la lectura de este artículo es recomendable haber leído con anterioridad otros tres artículos relacionados con las sucesiones de números reales y las funciones reales de variable real. Son los siguientes:

- Sobre funciones reales de variable real. Composición de funciones. Función inversa.
- Sucesiones de números reales. Sucesiones convergentes: límite de una sucesión.
- Sucesiones acotadas. Propiedades de las sucesiones convergentes.
- Más sobre límites de sucesiones. Sucesiones parciales. Sucesiones monótonas.

Por otro lado, nos gustaría hacer notar que en bachillerato, el concepto de función continua en un punto se introduce a través del concepto de límite de una función en un punto y, desde el punto de vista gráfico, diciendo que la gráfica de la función al pasar por ese punto se puede dibujar "sin levantar el lápiz del papel". De hecho, del concepto de límite se habla en términos gráficos muy generales y raras veces se da la definición de límite funcional de manera algo más rigurosa (cosa que nosotros haremos en un artículo posterior). Lo que vamos a ver aquí es el concepto de función continua en un punto y en un conjunto, así como sus propiedades, sin necesidad de utilizar el concepto de límite de una función, sino solamente usando sucesiones de números reales, el concepto de sucesión convergente y sus propiedades (merece la pena insistir: ya veremos que para definir el concepto de límite de una función se usa el de límite de una sucesión). Finalmente daremos una caracterización de la continuidad muy útil en algunos casos. Insistimos en que el lenguaje matemático a este nivel puede parecer difícil a un alumno que ha finalizado el bachillerato, pero no hay que preocuparse, con el tiempo y un poco de tesón uno se acostumbra con cierta facilidad. Es un lenguaje preciso y conviene interpretarlo adecuadamente. Empezaremos por definir el concepto de función continua en un punto.

Definición 1.
Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función real de variable real y sea x un elemento de A. Diremos que f es *continua* en el punto x si para toda sucesión $\{x_n\}$ de elementos de A convergente a x, se tiene que la sucesión $\{f(x_n)\}$ converge a $f(x)$. Dado un subconjunto no vacío B de A, es muy natural decir que f es continua en B cuando sea continua en todos los puntos de B. Por supuesto, puede ser $B = A$.

Si pensamos en la definición anterior, y la llevamos a la representación gráfica de la función, seremos capaces de visualizar el significado (que, en realidad es el mismo que se obliga a visualizar a los estudiantes de bachillerato usando el concepto de límite de una función). Por cierto, es conveniente hacer notar que si una función no está definida en un punto no se puede hablar de la continuidad de la función en ese punto; o sea, no es que la función sea o deje de ser continua en el punto, es que no tiene sentido hablar de la continuidad de una función en un punto que no pertenece a su dominio de definición. Así por ejemplo, afirmar que "la función $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ no es continua en el punto $x = 1$" es algo que carece de sentido pues la función no está definida en $x = 1$. Esto supone "liquidarse" de alguna manera la visualización de la idea de continuidad como eso de "dibujar sin levantar el lápiz del papel"; tal idea gráfica conviene reducirla única y exclusivamente al dominio de definición de la función. En los puntos que no pertenezcan al dominio de definición ocurrirán otras cosas. Así por ejemplo, volviendo a la función anterior, lo que ocurre es que $x = 1$ es una asíntota vertical de la función $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$.

De entrada hay dos funciones continuas en todos los puntos de cualquier conjunto A no vacío de números reales en los que estén definidas. La demostración de este hecho es prácticamente inmediata usando directamente la definición anterior. Son las siguientes:

- La **función constante** en A: dado $k \in \mathbb{R}$; $f(x) = k\,, \forall\, x \in A$.
- La **función identidad** en A: $f(x) = x\,, \forall\, x \in A$.

Las proposiciones que demostraremos a continuación permitirán obtener más funciones continuas a partir de las dos anteriores.

Proposición 1.
Sea A un conjunto no vacío de números reales. Si f y g son funciones de A en $\mathbb{R}$ continuas en un punto a de A, entonces $f+g$ y fg son continuas en a. Como consecuencia, si f y g son continuas en un subconjunto B de A, también lo serán $f+g$ y fg.
Demostración
Sea $\{x_n\}$ cualquier sucesión de puntos de A convergente a a. Entonces, por ser f y g continuas en a tenemos que

$$\{f(x_n)\} \to f(a) \quad \text{y} \quad \{g(x_n)\} \to g(a)$$

Por tanto:

$$\{(f+g)(x_n)\} = \{f(x_n) + g(x_n)\} \to f(a) + g(a) = (f+g)(a)$$

y

$$\{(fg)(x_n)\} = \{f(x_n)g(x_n)\} \to f(a)g(a) = (fg)(a)$$

Aquí hemos utilizado la Proposición 2 y el Corolario 1 del artículo dedicado a las propiedades de las sucesiones convergentes.

Proposición 2.
Sea A un conjunto no vacío de números reales, f y g funciones de A en $\mathbb{R}$. Supongamos que $g(x) \neq 0\,,\forall\, x \in A$. Si f y g son continuas en un punto a de A, entonces la función $\dfrac{f}{g}$ es continua en a. Como consecuencia, si f y g son continuas en un subconjunto B de A, también lo es $\dfrac{f}{g}$.
Demostración
Demostrando que la función $\dfrac{1}{g}$ es continua en a, haciendo uso la proposición anterior, tendremos demostrado este resultado. Pues bien, si $\{x_n\} \to a$ con $x_n \in A\,,\forall\, n \in \mathbb{N}$, tenemos, por ser g continua en a, que $\{g(x_n)\} \to g(a)$. Además $g(x_n) \neq 0\,,\forall\, n \in \mathbb{N}$ y $g(a) \neq 0$. Por tanto, usando la Proposición 4 del artículo dedicado a las propiedades de las sucesiones convergentes, tenemos:

$$\left\{\frac{1}{g}(x_n)\right\} = \left\{\frac{1}{g(x_n)}\right\} \to \frac{1}{g(a)} = \frac{1}{g}(a)$$

tal y como queríamos demostrar.

Puesto que de todos es conocido lo que es un polinomio, podemos definir una función polinómica como sigue. Si A es un conjunto no vacío de números reales, una función $f : A \to \mathbb{R}$ se dice que es *polinómica* si existe un entero $p \geqslant 0$ y números reales $a_0, a_1, \ldots, a_p$ tales que

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_px^p\,,\forall\, x \in A$$

Diremos también que una función $f : A \to \mathbb{R}$ es racional si existen funciones polinómicas f_1 y f_2 en A, con $f_1(x) \neq 0\,,\forall\, x \in A$, tales que

$$f(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}\,,\forall\, x \in A$$

Puesto que la función constante y la función identidad son continuas, las proposiciones anteriores permiten afirmar que toda función racional definida en un conjunto A no vacío de números reales es continua en A.

Todo lo anterior se puede resumir diciendo que la continuidad se conserva para la suma, el producto y el cociente de funciones. Básicamente, si dos funciones son continuas, la suma, el producto y el cociente de ambas también son funciones continuas. Recordemos que en el artículo dedicado a la funciones reales de variable real vimos el concepto de composición de funciones. Veremos por último también que si dos funciones son continuas la composición de ambas también lo es.

Proposición 3.
Sean $f : A \to \mathbb{R}$, $g : B \to \mathbb{R}$ funciones reales de variable real y supongamos $f(A) \subset B$. Si f es continua en un punto a de A y g es continua en el punto $f(a)$, entonces la composición $g \circ f$ es continua en a. Como consecuencia, si f es continua en A y g es continua en $f(A)$, entonces $g \circ f$ es continua en A.
Demostración
Sea $\{x_n\}$ una sucesión de puntos de A tal que $\{x_n\} \to a$ y sea $y_n = f(x_n)\,, \forall\, n \in \mathbb{N}$. Entonces $\{y_n\}$ es una sucesión de puntos de B que, por ser f continua en a, converge a $f(a)$. Por ser g continua en $f(a)$ tenemos que $\{g(y_n)\}$ converge a $\{g(f(a))\}$, es decir

$$\{(g \circ f)(x_n)\} \to (g \circ f)(a)$$

tal y como queríamos.

Vamos a demostrar ahora que la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = |x|\,, \forall\, x \in \mathbb{R}$$

(función valor absoluto) es continua en $\mathbb{R}$.
Sea $a \in \mathbb{R}$ y $\{x_n\}$ una sucesión de números reales tal que $\{x_n\} \to a$. Hemos de demostrar que $\{g(x_n)\} \to g(a)$, o lo que es lo mismo, que $\{|x_n|\} \to |a|$. Para ello utilizaremos la definición de sucesión convergente. Consideremos $\varepsilon > 0$. Como $\{x_n\} \to a$, $\exists\, m \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geqslant m$, entonces $|x_n - a| < \varepsilon$. Pero, por las propiedades del valor absoluto, $||x_n| - |a|| \leqslant |x_n - a|$ siempre que $n \geqslant m$, con lo que hemos demostrado que $\{|x_n|\} \to |a|$, tal y como queríamos.

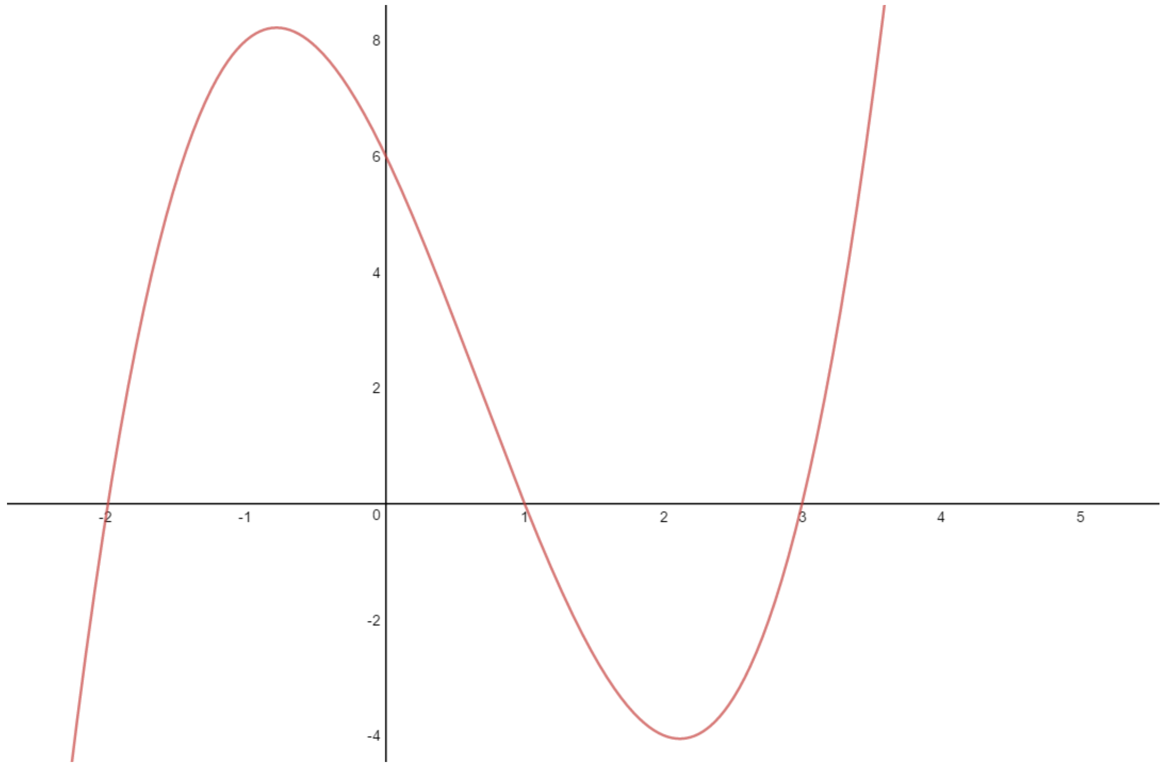
De lo anterior se deduce que, dada una función $f : A \to \mathbb{R}$, la función $|f| : A \to \mathbb{R}$ definida por

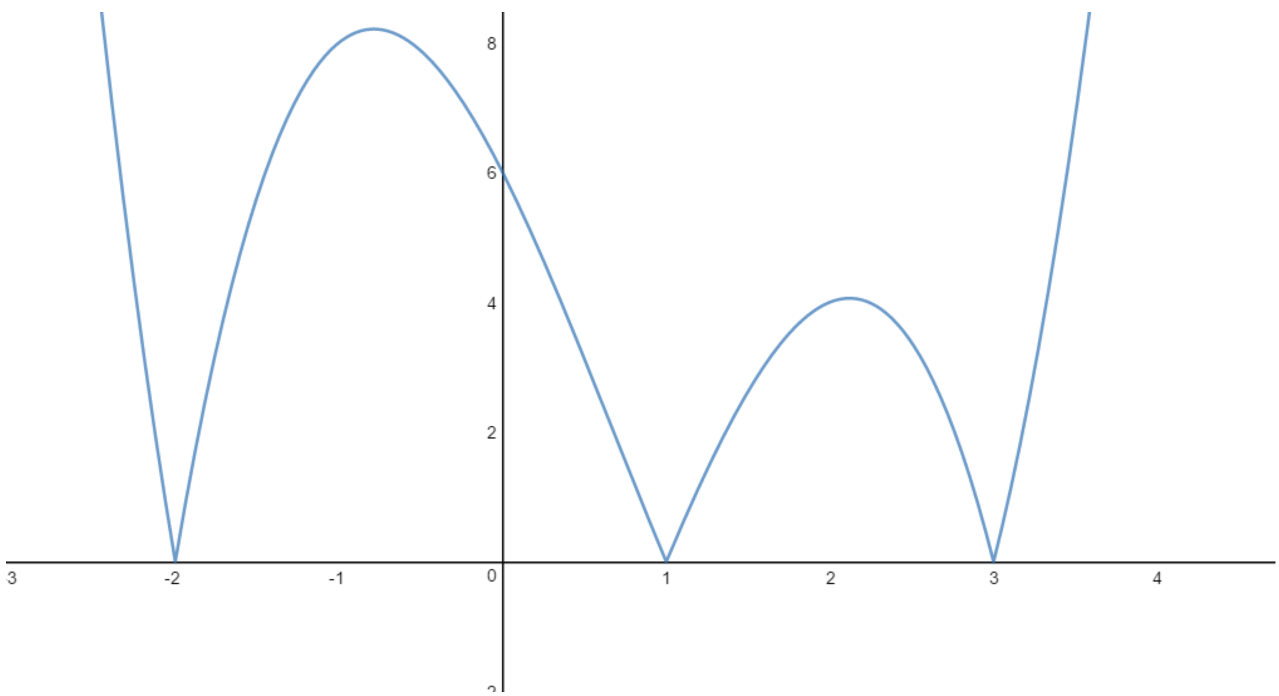
$$|f|(x) = |f(x)|\,, \forall\, x \in A$$

es continua en todo punto de A donde lo sea f. La razón es que la función anterior es la composición de la función de f con la función valor absoluto.

Esto nos permite ampliar el conjunto de las funciones continuas. Así, la función $f(x) = |p(x)|$ donde p es una función polinómica, es continua en todo $\mathbb{R}$.

Por ejemplo, como $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ es continua en todo $\mathbb{R}$, la función $|f|(x) = |f(x)| = |x^3 - 2x^2 - 5x + 6|$ también es continua en todo $\mathbb{R}$. Sus gráficas son las siguientes:





Obsérvese que la gráfica de $|f|$ coincide con la de f cuando $f(x) \geqslant 0$ ya que, en este caso, $|f(x)| = f(x)$. Sin embargo, cuando $f(x) < 0$, tenemos que $|f(x)| = -f(x)$, con lo que para obtener la gráfica de $|f|$ basta situar simétricamente al eje X los puntos en los que la ordenada de f es menor que cero. Resumiendo:

$$|f|(x) = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad f(x) \geqslant 0 \\ -f(x) & \text{si} \quad f(x) < 0 \end{cases}$$

Sin embargo puede ocurrir que $|f|$ sea continua en un punto y que f no lo sea. Por ejemplo, la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ -1 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

claramente no es continua en cero (¿serías capaz de demostrarlo usando la definición de función continua en un punto?). Sin embargo $|f|(x) = |f(x)| = 1\,, \forall\, x \in \mathbb{R}$, es constante y por tanto es continua en cero.

Proponemos a continuación tres ejercicios acerca de la continuidad de funciones reales de variable real.

1. Estúdiese la continuidad de la función f de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ definida por

   $$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 1 - x & \text{si} \quad x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

   Solución.

   Sea $x_0 \in \mathbb{Q}$ y $\{x_n\}$ una sucesión de irracionales convergente a x_0 (que sabemos que existe por el ejercicio 5 del artículo dedicado a las propiedades de las sucesiones convergentes). Entonces $\{f(x_n)\} = \{1 - x_n\} \to 1 - x_0$. Para que f sea continua en x_0 debe ocurrir que $\{f(x_n)\} \to f(x_0) = x_0$, es decir, $1 - x_0 = x_0 \Rightarrow x_0 = \frac{1}{2}$.

   De manera similar, sea ahora $x_0 \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ y $\{x_n\}$ una sucesión de racionales convergente a x_0 (que también sabemos que existe por el mismo ejercicio mencionado anteriormente). Entonces $\{f(x_n)\} = \{x_n\} \to x_0$. Para que f sea continua en x_0 debe ocurrir que $\{f(x_n)\} \to f(x_0) = 1 - x_0$, es decir, $x_0 = 1 - x_0 \Rightarrow x_0 = \frac{1}{2}$. Pero esto es absurdo pues $x_0 \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

   Debemos concluir por tanto que f solamente es continua en el punto $x = \frac{1}{2}$.

2. Sean f y g funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, continuas en todo $\mathbb{R}$. Supongamos que $f(x) = g(x)\,, \forall\, x \in \mathbb{Q}$. Pruébese que $f = g$. En particular, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua y la restricción de f a $\mathbb{Q}$ es constante, entonces f es constante.

   Solución.

Supongamos que existe un número $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ tal que $f(a) \neq g(a)$. Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números racionales convergente al punto a. Entonces $\{f(a_n)\} \to f(a)$ y $\{g(a_n)\} \to g(a)$ por ser f y g continuas en todo $\mathbb{R}$. Pero $f(a_n) = g(a_n)\,, \forall\, n \in \mathbb{N}$ pues $a_n \in \mathbb{Q}\,, \forall\, n \in \mathbb{N}$. Esto significa que $f(a) = g(a)$, en contradicción con que $f(a) \neq g(a)$. Por tanto $f = g$.

3. Sea A un conjunto no vacío de números reales. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \text{ínf}\{|x-a| \,:\, x \in A\}$. Pruébese que $|f(x) - f(y)| \leqslant |x-y|\,, \forall\, x\,, y \in \mathbb{R}$. Dedúzcase que f es continua en todo $\mathbb{R}$.

   Solución.

   Sea $a \in A$. De la desigualdad $||x-a| - |y-a|| \leqslant |(x-a)-(y-a)| = |x-y|$ se deduce inmediatamente $|f(x) - f(y)| \leqslant |x-y|\,, \forall\, x\,, y \in \mathbb{R}$. Sea ahora una sucesión $\{x_n\}$ de números reales convergente a un número real x. Entonces dado un número real y positivo ε existe $m \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geqslant m$, entonces $|f(x_n) - f(x)| \leqslant |x_n - x| < \varepsilon$. De aquí se deduce que $\{f(x_n)\} \to f(x)$, y por tanto f es continua en todo $\mathbb{R}$.

Caracterización de la continuidad

De la misma forma que para la definición de sucesión convergente se usó cierta terminología para dar forma a la idea de que todos los términos de la sucesión, salvo un número finito de ellos, estaban tan cerca del límite como quisiéramos; podemos dar una caracterización de función continua en un punto $a \in \mathbb{R}$. En este caso, la idea es formalizar mediante una notación adecuada el hecho de que "si en el eje Y las imágenes por la función f están tan cerca como queramos de $f(a)$, es porque en el eje X también estamos tan cerca como queramos del punto a". Vamos a formalizar lo anterior adecuadamente.

Teorema 1.
Sea A un conjunto no vacío de números reales, f una función real definida en A y a un punto de A. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) f es continua en a.

ii) Para toda sucesión $\{x_n\}$ de puntos de A, monótona y convergente al punto a, la sucesión $\{f(x_n)\}$ converge a $f(a)$.

iii) Para cada número real y positivo ε puede encontrarse un número real positivo δ tal que si x es un punto de A verificando $|x-a| < \delta$, se tiene $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Demostración.
i) $\Rightarrow$ ii) Es evidente pues lo que en i) se exige para toda sucesión de A que converja al punto a, en

ii) se exige solamente para aquellas que sean monótonas.

ii) $\Rightarrow$ iii) Supongamos, razonando por reducción al absurdo, que se cumple ii) pero no se cumple iii). Entonces existe un número real positivo ε_0 con la siguiente propiedad:

$$\forall\, \delta > 0 \;\; \exists\, x_\delta \in A \,:\, |x_\delta - a| < \delta \quad \text{y} \quad |f(x_\delta) - f(a)| \geqslant \varepsilon_0$$

Para cada natural n, aplicamos lo anterior para $\delta = \dfrac{1}{n}$ y sea $y_n = x_{1/n}$. Obtenemos así una sucesión $\{y_n\}$ de puntos de A que verifica

$$|y_n - a| < \frac{1}{n} \quad \text{y} \quad |f(y_n) - f(a)| \geqslant \varepsilon_0 \,,\; \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Claramente $\{y_n\}$ converge al punto a; entonces existe con seguridad una sucesión parcial $\{y_{\sigma(n)}\}$ de $\{y_n\}$ que es monótona (ver lema 2 del artículo dedicado a las sucesiones parciales y monótonas). Aplicando la hipótesis ii) tenemos que la sucesión $\{f(y_{\sigma(n)})\}$ converge a $f(a)$, lo cual es absurdo pues

$$|f(y_{\sigma(n)}) - f(a)| \geqslant \varepsilon_0 \,,\; \forall\, n \in \mathbb{N}$$

iii) $\Rightarrow$ i) Sea $\{x_n\}$ una sucesión de puntos de A convergente al punto a. Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario y δ el número positivo dado por la hipótesis iii). Por ser $\{x_n\} \to a$ tenemos:

$$\exists\, m \in \mathbb{N} \,:\, n \geqslant m \Rightarrow |x_n - a| < \delta$$

y puesto que $x_n \in A$ tenemos por iii) que $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$ para $n \geqslant m$. Esto demuestra que

$$\{f(x_n)\} \to f(a)$$

y por tanto que f es continua en el punto a, tal y como queríamos.

Proponemos a continuación otros tres ejercicios para practicar la caracterización de la continuidad.

1. Sean f_1, f_2 funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Estúdiese la continuidad de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si} \quad x \in \mathbb{R}^- \\ f_2(x) & \text{si} \quad x \in \mathbb{R}_0^+ \end{cases}$$

Solución.

f es claramente continua si $x \in \mathbb{R}^-$ o si $x \in \mathbb{R}^+$, pues dado un punto cualquiera de $\mathbb{R}^-$ (respectivamente, de $\mathbb{R}^+$), es posible encontrar un intervalo centrado en el punto y contenido en

$\mathbb{R}^-$ (respectivamente, $\mathbb{R}^+$), y dado el carácter local de la continuidad se tiene el resultado. Estudiemos pues la continuidad en cero.

Sea la sucesión $\{\frac{(-1)^n}{n}\}$, que converge a 0. Entonces $\{f(x_n)\} = \{f_1(x_n)\}$ si n es impar y $\{f(x_n)\} = \{f_2(x_n)\}$ si n es par. Consideremos las sucesiones parciales $\{x_{2n-1}\}$ y $\{x_{2n}\}$, ambas convergentes a cero. Así, por un lado, $\{f(x_{2n-1})\} = \{f_1(x_{2n-1})\} \to f_1(0)$; y por otro, $\{f(x_{2n})\} = \{f_2(x_{2n})\} \to f_2(0)$, pues f_1 y f_2 son continuas en todo $\mathbb{R}$. De aquí se deduce que si $f_1(0) = f_2(0)$, f es continua en 0. Pero si $f_1(0) \neq f_2(0)$, entonces f no es continua en 0.

2. Utilícese la afirmación iii) del teorema anterior para probar que la función f del ejercicio 1 de la sección anterior es continua en el punto $\frac{1}{2}$.

   Solución.

   Hemos de demostrar que dado un número real y positivo ε, existe un número real positivo δ tal que si x es un punto de $\mathbb{R}$ verificando $|x - \frac{1}{2}| < \delta$, entonces $|f(x) - f(\frac{1}{2})| < \varepsilon$. Pero es que si $x \in \mathbb{Q}$, entonces $|f(x) - f(\frac{1}{2})| = |x - \frac{1}{2}|$ y basta tomar $\delta = \varepsilon$. Ahora bien, si $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, se tiene que $|f(x) - f(\frac{1}{2})| = |1 - x - \frac{1}{2}| = |\frac{1}{2} - x| = |x - \frac{1}{2}|$, y basta en este caso tomar también $\delta = \varepsilon$.

3. Pruébese, utilizando la afirmación iii) del teorema anterior, que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2\,, \forall\, x \in \mathbb{R}$ es continua en $\mathbb{R}$.

   Solución.

   Sea $x_0 \in \mathbb{R}$. Tenemos:

   $$|f(x) - f(x_0)| = |x^2 - x_0^2| = |(x + x_0)(x - x_0)| = |x + x_0||x - x_0|$$

   Dado $\varepsilon > 0$ sea $\delta = \frac{\varepsilon}{|x+x_0|}$. Entonces, si $|x - x_0| < \delta$:

   $$|f(x) - f(x_0)| = |x + x_0||x - x_0| < |x + x_0|\delta = |x + x_0|\frac{\varepsilon}{|x + x_0|} = \varepsilon$$

   con lo que f es continua en todo $\mathbb{R}$.

Finalmente, procede de nuevo insistir en que en este artículo se ha definido la continuidad de una función en un punto haciendo uso de la convergencia de una sucesión en un punto. En algunos textos se define directamente la continuidad de una función en un punto sin haber visto para nada las sucesiones de números reales. En su lugar se define el límite de una función en un punto de una forma equivalente a la parte iii) del teorema anterior y luego se dice que una función f es continua en un punto a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. Las dos formas de introducir la continuidad son completamente lícitas. No olvidemos que, usemos sucesiones o usemos el concepto de límite para definir la continuidad, en realidad estamos hablando de lo mismo. Nosotros introduciremos el concepto de límite de una función en un punto (y en el infinito) en un artículo posterior. Lo que haremos a continuación es presentar algunos teoremas relacionados con la continuidad de importancia capital en el análisis matemático.