Determinantes

Determinante de una matriz cuadrada

Toda matriz cuadrada A lleva asociado un número, llamado determinante de A, y que denotaremos mediante el símbolo $|A|$. Este número, entre otras cosas, permite saber cuándo una matriz cuadrada tiene inversa y, caso de que ésta exista, también se utiliza para su cálculo utilizando otro método alternativo al método de Gauss, método que ya se vio en un artículo dedicado a las matrices.

Determinante de una matriz cuadrada de orden 2

Dada una matriz cuadrada de orden 2,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

el determinante de la matriz A viene dado por

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Por ejemplo, el determinante de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}$$

es

$$|A| = \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 7 & -5 \end{vmatrix} = (-3) \cdot (-5) - (-4) \cdot 7 = 15 - (-28) = 15 + 28 = 43$$

Determinante de una matriz cuadrada de orden 3

Dada una matriz cuadrada de orden 3,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

el determinante de A viene dado por la fórmula siguiente:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22}a_{23} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32})$$

Por ejemplo, el determinante de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -3 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

viene dado por

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -3 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (1 \cdot 4 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 \cdot (-1) + (-3) \cdot 5 \cdot 1) - (5 \cdot 4 \cdot (-1) + (-2) \cdot (-3) \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 1) =$$

$$= (8 + 2 - 15) - (-20 + 12 + 1) = -5 - (-7) = -5 + 7 = 2$$

Como esta fórmula es bastante engorrosa y complicada de aprender, propondremos una regla mnemotécnica para su uso. Se recurre a la estrategia siguiente. Copiamos la matriz y debajo la primera y segunda filas. Los términos positivos corresponden a la diagonal principal y a las otras dos que van por debajo. Los términos negativos son los que corresponden a la diagonal secundaria y a las otras dos que van por debajo.

$$\begin{array}{ccc} 1 & -2 & 5 \\ -3 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \\ -3 & 4 & 1 \end{array} \quad ; \quad \begin{array}{ccc} 1 & -2 & 5 \\ -3 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \\ -3 & 4 & 1 \end{array}$$

Como se puede ver en la figura anterior, a la izquierda se encuentran los términos positivos y a la derecha los términos negativos, con lo que

$$|A| = (8 - 15 + 2) - (-20 + 1 + 12) = (-5) - (-7) = -5 + 7 = 2$$

Esta regla se conoce con el nombre de regla de Sarrus.

Menor complementario. Matriz adjunta de una matriz cuadrada
Para el cálculo de la inversa de una matriz cuadrada utilizando determinantes necesitamos introducir los conceptos de adjunto de un elemento de una matriz cuadrada, y de matriz adjunta de una matriz cuadrada.

Menor complementario y adjunto de un elemento de una matriz cuadrada
Dada una matriz cuadrada A de orden n, el menor complementario del elemento a_{ij} de la matriz A, es el determinante de la matriz cuadrada de orden $n-1$ que se obtiene al suprimir la fila i y la columna j en la matriz A. Se representa por Δ_{ij}. Se llama adjunto A_{ij} del elemento a_{ij}, al número dado por la fórmula

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \Delta_{ij}$$

Por ejemplo, si consideramos la matriz A del ejemplo visto anteriormente, el menor complementario del elemento $a_{21} = -3$, es el determinante de la matriz cuadrada de orden 2 que resulta de suprimir la fila 2 y la columna 1:

$$\Delta_{21} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -3 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 \cdot 2 - 5 \cdot 1 = -4 - 5 = -9$$

El adjunto del mismo elemento $a_{21} = -3$ es, por tanto:

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \Delta_{21} = (-1)^3 \cdot (-9) = (-1) \cdot (-9) = 9$$

Calculemos como ejemplo los ocho adjuntos restantes de la matriz A:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \Delta_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (8-1) = 1 \cdot 7 = 7$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \Delta_{12} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-6 - (-1)) = -1 \cdot (-5) = 5$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \Delta_{13} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-3 - (-4)) = 1 \cdot 1 = 1$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \Delta_{22} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (2 - (-5)) = 1 \cdot 7 = 7$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \Delta_{23} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (1-2) = -1 \cdot (-1) = 1$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \Delta_{31} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2 - 20) = 1 \cdot (-22) = -22$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \Delta_{32} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (1 - (-15)) = -1 \cdot 16 = -16$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \Delta_{33} = (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (4-6) = 1 \cdot (-2) = -2$$

Matriz adjunta de una matriz cuadrada

La matriz adjunta de una matriz cuadrada A, que denotaremos por A^d, es la formada por los adjuntos de la matriz A:

$$A^d = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Así, la matriz adjunta de la matriz A del ejemplo anterior, es

$$A^d = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 9 & 7 & 1 \\ -22 & -16 & -2 \end{pmatrix}$$

Matriz inversa de una matriz cuadrada utilizando determinantes

Un resultado muy importante sobre matrices cuadradas y determinantes es el siguiente

Teorema

Una matriz cuadrada A tiene inversa si, y solamente si, su determinante es distinto de cero. Simbólicamente:

$$A \in \mathcal{M}_n \, , \exists \, A^{-1} \Leftrightarrow |A| \neq 0$$

Cálculo de la matriz inversa utilizando determinantes Supongamos que una matriz cuadrada A tiene inversa. Es decir, según el teorema anterior, $|A| \neq 0$. Entonces la inversa de A, A^{-1}, viene dada por la siguiente fórmula:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \left(A^d\right)^t$$

La matriz $\left(A^d\right)^t$ es la traspuesta de la adjunta de A (recuerda que la traspuesta de una matriz es otra matriz que se obtiene intercambiando las filas por las columnas).

Calculemos como ejemplo la matriz inversa de la matriz que hemos venido utilizando para los ejemplos anteriores.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \left(A^d\right)^t = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 9 & 7 & 1 \\ -22 & -16 & -2 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 9 & -22 \\ 5 & 7 & -16 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & \frac{9}{2} & -11 \\ \frac{5}{2} & \frac{7}{2} & -8 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

En el caso de matrices cuadradas de orden 2 la fórmula anterior es muy sencilla de recordar.

Supongamos que tenemos una matriz cuadrada de orden 2

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Entonces es fácil darse cuenta de que la matriz adjunta de A y la traspuesta de la adjunta de A, son las matrices

$$A^d = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}, \ \left(A^d\right)^t = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{a_{22}}{|A|} & \dfrac{-a_{12}}{|A|} \\ \dfrac{-a_{21}}{|A|} & \dfrac{a_{11}}{|A|} \end{pmatrix}$$

Por ejemplo, dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

tenemos que su determinante es

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 8 - (-3) = 8 + 3 = 11$$

Por tanto, la inversa de A será la matriz

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{a_{22}}{|A|} & \dfrac{-a_{12}}{|A|} \\ \dfrac{-a_{21}}{|A|} & \dfrac{a_{11}}{|A|} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{11} & \frac{3}{11} \\ -\frac{1}{11} & \frac{2}{11} \end{pmatrix}$$

Propiedades de los determinantes

En la enumeración de estas propiedades daremos por hecho que nos referimos siempre a una matriz cuadrada de cualquier orden.

1. El determinante de una matriz es igual que el de su traspuesta: $|A| = |A^t|$.

2. Si una matriz tiene una fila o una columna de ceros, su determinante es cero.

3. Si se intercambian dos filas o dos columnas de una matriz, su determinante cambia de signo.

4. Si una matriz tiene dos filas o dos columnas iguales, su determinante es cero.

5. Si multiplicamos por el mismo número todos los elementos de una fila o de una columna de una matriz, su determinante queda multiplicado por ese número. Consecuentemente, el determinante de una matriz cuadra A de orden n multiplicada por un número real λ es igual a λ^n veces el determinante de A, es decir,

$$|\lambda A| = \lambda^n |A|$$

6. Si una matriz tiene dos filas o dos columnas proporcionales, su determinante es cero.

7. Si denotamos por $c_1, \ldots, c_i, \ldots, c_n$ a las n columnas de una matriz cuadrada de orden n, tenemos:

$$|c_1, \ldots, c_i + c'_i, \ldots, c_n| = |c_1, \ldots, c_i, \ldots, c_n| + |c_1, \ldots, c'_i, \ldots, c_n|$$

   Esta descomposición es válida cualesquiera sean la fila o la columna en la que se encuentren los sumandos.

8. Si a una fila o una columna de una matriz le sumamos una combinación lineal de las demás filas o columnas, su determinante no varía.

9. Si una matriz tiene una fila o una columna que es combinación lineal de las demás filas o columnas, entonces su determinante es cero. Y, recíprocamente, si un determinante es cero, es porque una fila o una columna es combinación de las demás.

10. El determinante del producto de dos matrices es igual al producto de sus determinantes: $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$.

11. El determinante de una matriz triangular es igual al producto de los elementos situados en la diagonal principal. En particular $|I| = 1$, donde I es la matriz identidad de orden n.

Cálculo de un determinante desarrollando por los elementos de una fila o de una columna
Sea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n$. El determinante de la matriz A se puede calcular usando la siguiente fórmula:

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

si desarrollamos por los elementos de la fila i-ésima, o bien

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$$

si desarrollamos por los elementos de la columna j-ésima.
Usando el desarrollo de por los elementos de una fila o de una columna podemos calcular un determinante de orden superior a tres. Veamos un ejemplo de cálculo de un determinante de orden 4.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & 5 & 0 \\ 1 & -6 & 0 & 2 \\ 3 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{31} + (-6) \cdot A_{32} + 0 \cdot A_{33} + 2 \cdot A_{34} =$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 6 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 4 & 5 \\ 3 & -3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot 6 + 6 \cdot (-3) - 2 \cdot 9 = 6 - 18 - 18 = -30$$

Donde se ha desarrollado por los elementos de la tercera fila. Se deja al lector el cálculo de los determinantes de orden tres que aparecen el desarrollo anterior.
Usando las propiedades de los determinantes y el desarrollo por los elementos de una fila o de una columna se pueden calcular algunos determinantes con cierta facilidad. Veamos un ejemplo.
Supongamos que queremos resolver la ecuación

$$\begin{vmatrix} 2x-1 & 3x & x-2 \\ 2x+1 & x & 2x+1 \\ 2x-1 & 3x & 3x-2 \end{vmatrix} = 0$$

Si en el determinante le restamos a la segunda fila la primera y a la tercera también la primera nos queda un determinante más sencillo. Posteriormente desarrollamos por lo elementos de la tercera fila.

$$\begin{vmatrix} 2x-1 & 3x & x-2 \\ 2x+1 & x & 2x+1 \\ 2x-1 & 3x & 3x-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x-1 & 3x & x-2 \\ 2 & -2x & x+3 \\ 0 & 0 & 2x \end{vmatrix} = 2x \begin{vmatrix} 2x-1 & 3x \\ 2 & -2x \end{vmatrix} =$$

$$= 2x\left(-4x^2 + 2x - 6x\right) = 2x\left(-4x^2 - 4x\right) = -8x^2\,(x+1)$$

Por tanto la ecuación inicial es equivalente a $-8x^2\,(x+1) = 0$, cuyas soluciones son claramente $x = 0$ y $x = -1$.
Como se podrá observar para calcular un determinante a veces conviene "hacer ceros.en alguna fila o columna, usando la propiedad 8 y desarrollar posteriormente por la fila o por la columna elegida.