El problema de la velocidad. Derivada de una función. Ejemplos de derivadas

Un problema relativo a velocidad

Sea un proyectil lanzado verticalmente desde el suelo a una velocidad de 45 metros por segundo. Prescindiendo del rozamiento, se supone que solamente actúa la gravedad, por lo que el proyectil se mueve en línea recta. Sea $f(t)$ la altura en metros que alcanza el proyectil t segundos después del lanzamiento. Si la fuerza de la gravedad no actuara en él, el proyectil continuaría subiendo a velocidad constante, recorriendo una distancia de 45 metros cada segundo, y en el tiempo t se tendría $f(t) = 45t$. Pero a causa de la gravedad, el proyectil va retardándose hasta que su velocidad llega a valer cero, y a partir de ese momento cae al suelo. Experiencias físicas indican que mientras el proyectil está en movimiento su altura $f(t)$ viene dada aproximadamente por la fórmula

$$f(t) = 45t - 5t^2 \qquad (1)$$

El término $-5t^2$ es debido a la influencia de la gravedad. Obsérvese que $f(t) = 0$ cuando $t = 0$ y $t = 9$; o sea, que el proyectil regresa a la tierra después de 9 segundos, por lo que la fórmula anterior sólo es válida para $0 \leqslant t \leqslant 9$.

El problema a considerar es el siguiente: *Determinar la velocidad del proyectil en cada instante de su movimiento*. Para poder comprender este problema, hay que precisar lo que se *entiende* por velocidad en cada instante. Para ello, se introduce la noción de *velocidad media durante un intervalo de tiempo*, es decir, desde el instante t al $t+h$, definiéndola como el cociente:

$$\frac{\text{diferencia de distancias en el intervalo de tiempo}}{\text{intervalo de tiempo}} = \frac{f(t+h)-f(t)}{h}$$

Este cociente, llamado *cociente incremental*, es un número que se puede calcular siempre que t y $t+h$ pertenezcan ambos al intervalo $[0,9]$. El número h puede ser positivo o negativo, pero no cero. Se dejará fijo t y se estudiará lo que le ocurre al cociente incremental, cuando se dan a h valores cada vez menores en valor absoluto.

Por ejemplo, considérese el instante $t = 2$. La distancia recorrida después de 2 segundo es:

$$f(2) = 90 - 20 = 70$$

En el tiempo $t = 2 + h$ la distancia recorrida es:

$$f(2+h) = 45(2+h) - 5(2+h)^2 = 70 + 25h - 5h^2$$

Por tanto, la velocidad media en el intervalo entre $t = 2$ y $t = 2 + h$ es

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{25h - 5h^2}{h} = 25 - 5h$$

Tomando valores de h cada vez más pequeños en valor absoluto, esta velocidad media se acerca más y más a 25. Por ejemplo, si $h = 0,1$ la velocidad media es $24,5$; si $h = 0,001$, es $24,995$; si $h = 0,00001$, se obtiene el valor $24,99995$, y cuando $h = -0,00001$ se obtiene $25,00005$. Lo importante es que se puede obtener la velocidad media tan próxima a 25 como se desee, si más que tomar $|h|$ suficientemente pequeño. Se describe este hecho diciendo que la velocidad media *tiende al límite* 25 *cuando* h *tiende a cero*. Parece natural llamar al valor de este límite la *velocidad instantánea* en el instante $t = 2$.

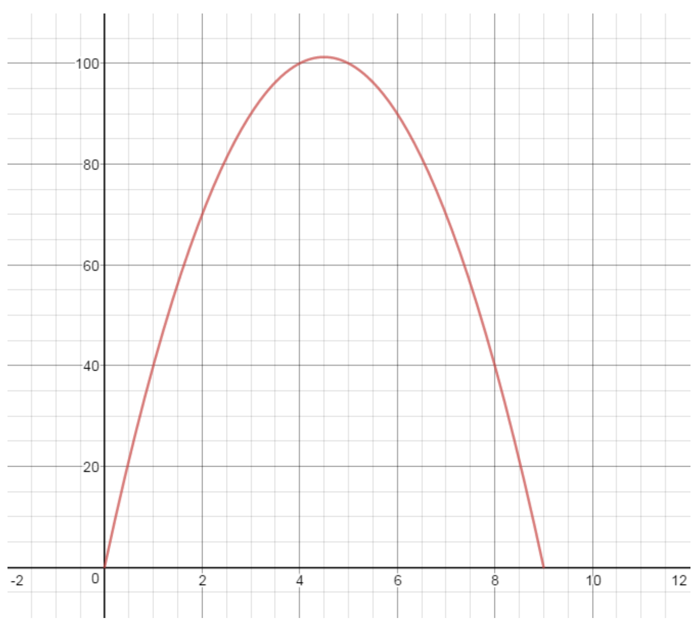
Los mismos cálculos se pueden efectuar para cualquier otro instante. La velocidad media en un intervalo arbitrario entre t y $t + h$ está dado por el cociente:

$$\frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \frac{(45(t+h) - 5(t+h)^2) - (45t - 5t^2)}{h} = 45 - 10t - 5h$$

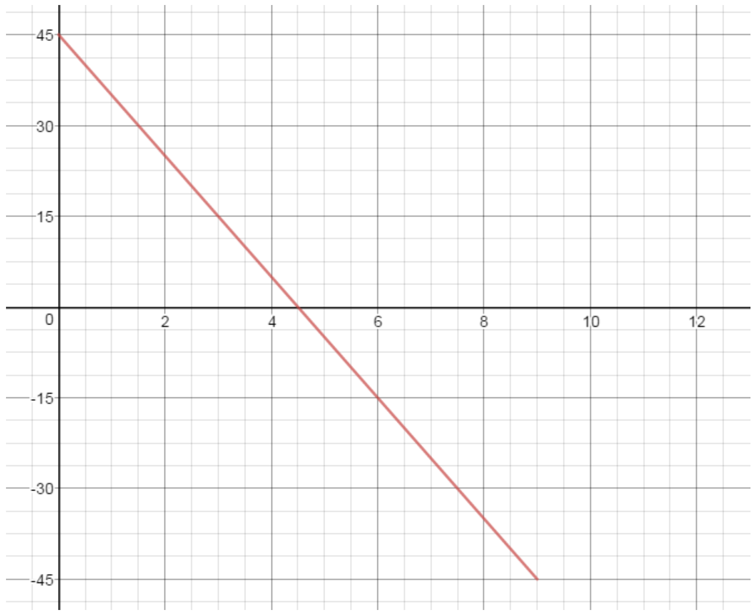
Cuando h tiende a cero, la expresión de la derecha tiende al límite $45 - 10t$ que define la *velocidad instantánea* en el instante t. Designando la velocidad instantánea por $v(t)$ se tiene

$$v(t) = 45 - 10t \qquad (2)$$

La fórmula (1) del espacio $f(t)$, define una función f que indica la altura a que se encuentra el proyectil en cada instante de su movimiento; f se denomina *función posición* o *ley de espacios*. Su dominio es el intervalo cerrado $[0, 9]$ y su gráfica es la siguiente:



La fórmula (2) de la velocidad $v(t)$ define una nueva función v que indica la rapidez con que se mueve el proyectil en cada instante de su movimiento, se denomina función velocidad y su gráfica la tienes a continuación.



Obsérvese que, al crecer t de 0 a 9, $v(t)$ decrece constantemente de $v(0) = 45$ a $v(9) = -45$. Para hallar el instante t en el cual $v(t) = 0$ se resuelve la ecuación $45 - 10t = 0$ obteniéndose $t = \frac{9}{2}$. Por tanto, en el punto central del movimiento la influencia de la gravedad reduce la velocidad a cero y el proyectil queda instantáneamente fijo. La altura en este instante es $f(\frac{9}{2}) = 101,25$. Si $t > \frac{9}{2}$, la velocidad es negativa y la altura decrece.

El proceso por el cual se obtiene $v(t)$ a partir del cociente incremental se denomina "hallar el límite cuando h tiende a cero", y se expresa simbólicamente como sigue:

$$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \qquad (3)$$

Esta expresión usada para definir la velocidad, en el ejemplo anterior, tiene un sentido más amplio y permite definir la velocidad en movimientos a lo largo de una línea recta, cuando se conozca la función de posición f, y siempre que el cociente incremental tienda a un límite cuando h tiende a cero.

Derivada de una función

El ejemplo expuesto en el apartado anterior señala el camino para introducir el concepto de derivada. Sea f una función definida por lo menos en un intervalo abierto (a, b) del eje X. Se elige un punto x en este intervalo y se forma el cociente de diferencias

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

donde el número h puede ser positivo o negativo (pero no cero), y tal que $x+h$ pertenezca también a (a,b). El numerador de este cociente mide la variación de la función cuando x varía de x a $x+h$. El cociente representa la *variación media* de f en el intervalo que une x a $x+h$.

Seguidamente se hace tender h a cero y se estudia lo que le ocurre a ese cociente. Si tiende hacia un cierto valor como límite (y será el mismo, tanto si h tiende a cero con valores positivos como negativos), entonces ese límite se denomina derivada de f en x y se indica por el símbolo $f'(x)$. Por tanto, la definición formal de $f'(x)$ puede establecerse del siguiente modo.

Definición de derivada.
La derivada $f'(x)$ está definida por la igualdad

$$f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad (4)$$

con tal que el límite exista. El número $f'(x)$ también se denomina *coeficiente de variación de f en x*.

Comparando la igualdad (4) con la igualdad (3) se ve que el concepto de velocidad instantánea es simplemente un ejemplo del concepto de derivada. La velocidad $v(t)$ es igual a la derivada $f'(t)$ cuando f es la ley de espacios; lo que frecuentemente se expresa diciendo que la velocidad es la relación entre la variación del espacio y la del tiempo. Ya hemos visto en el apartado anterior que la ley de espacios está dada por la ecuación $f(t)=45t-t^2$, y su derivada f' es una nueva función (velocidad) dada por $f'(t)=45-10t$.

En general, el proceso de paso al límite por el que se obtiene $f'(x)$ a partir de $f(x)$, abre un camino para obtener una nueva función f' a partir de una función dada f. Este proceso se denomina *derivación*, y f' es la *primera derivada* de f. Si f' a su vez está definida en un intervalo abierto, se puede también calcular su primera derivada, indicada por f'' y que es la *segunda derivada* de f. Análogamente, la derivada n-sima de f, que se indica por $f^{(n)}$, se define como la derivada primera de $f^{(n-1)}$. Convendremos en que $f^{(0)}=f$, esto es, la derivada de orden cero es la misma función.

En el caso del movimiento rectilíneo, la primera derivada de la velocidad (segunda derivada del espacio) se denomina *aceleración*. Por ejemplo, para calcular la aceleración en el ejemplo del apartado anterior, se puede utilizar la ecuación (2) para formar el cociente de diferencias

$$\frac{v(t+h)-v(t)}{h}=\frac{(45-10(t+h))-(45-10t)}{h}=\frac{-10h}{h}=-10$$

Como este cociente no varía al tender h a 0, se puede considerar que *tiende* a -10 (puesto que es -10 cuando h está próximo a 0). Se concluye pues que la aceleración en este problema es constante e igual a -10, lo que indica que la velocidad decrece a una razón de 10 metros por segundo cada segundo. En 9 segundos el decrecimiento total de la velocidad es $9\cdot 10=90$ metros por segundo, que está de acuerdo con el hecho de que durante los 9 segundos de movimiento la velocidad cambie de $v(0)=45$ a $v(9)=-45$.

Ejemplos de derivadas

EJEMPLO 1. *Derivada de la función constante*. Supongamos que f es una función constante: sea por ejemplo $f(x)=c$, para todo x. El cociente de diferencias es

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{c-c}{h}=0$$

Puesto que el cociente es 0 para todo x, su límite cuando h tiende a cero, $f'(x)$, es también 0 para todo x. Dicho de otro modo, una función constante tiene derivada nula para todo x.

EJEMPLO 2. *Derivada de la función lineal*. Sea f una función lineal, por ejemplo $f(x)=mx+n$ para todo real x. Si $h\neq 0$, tenemos

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{m(x+h)+b-(mx+b)}{h}=\frac{mh}{h}=m$$

Como que el cociente de diferencias no cambia cuando h tiende a 0, resulta que $f'(x)=m$, para cada x. Así que, la derivada de una función lineal es una función constante.

EJEMPLO 3. *Derivada de una función potencial de exponente entero positivo*. Consideremos el caso $f(x)=x^n$, siendo n un entero positivo. El cociente de diferencias es ahora

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{(x+h)^n-x^n}{h}$$

En álgebra elemental se tiene la igualdad (¡compruébese!)

$$a^n-b^n=(a-b)\left(b^{n-1}+ab^{n-2}+a^2b^{n-3}+\ldots+a^{n-2}b+a^{n-1}\right)$$

Es conveniente observar que el segundo paréntesis del segundo miembro tiene n sumandos. Si en la igualdad anterior se toma $a = x + h$ y $b = x$, la identidad se transforma en:

$$(x+h)^n - x^n = h\left(x^{n-1} + (x+h)x^{n-2} + (x+h)^2x^{n-3} + \ldots + (x+h)^{n-2}x + (x+h)^{n-1}\right)$$

Si dividimos entre h los dos miembros de la igualdad tenemos:

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = x^{n-1} + (x+h)x^{n-2} + (x+h)^2x^{n-3} + \ldots + (x+h)^{n-2}x + (x+h)^{n-1}$$

Insistimos en que en la suma del segundo miembro hay n términos. Cuando h tiende a 0 tenemos:

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0}\left(x^{n-1} + (x+h)x^{n-2} + (x+h)^2x^{n-3} + \ldots + (x+h)^{n-2}x + (x+h)^{n-1}\right) =$$

$$= x^{n-1} + x\cdot x^{n-2} + x^2\cdot x^{n-3} + \ldots + x^{n-2}\cdot x + x^{n-1} = x^{n-1} + x^{n-1} + x^{n-1} + \ldots n \text{ veces} \ldots + x^{n-1}$$

Por tanto, la suma de los últimos n términos es nx^{n-1}. En definitiva: $f'(x) = nx^{n-1}$, para todo x.

EJEMPLO 4. *Derivada de la función seno*. Sea $f(x) = \operatorname{sen} x$. El cociente de diferencias es

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h}$$

Para transformarlo de modo que haga posible calcular el límite cuando $h \to 0$, utilizamos la identidad trigonométrica

$$\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B = 2\operatorname{sen}\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}$$

Poniendo $A = x + h$ y $B = x$ tenemos

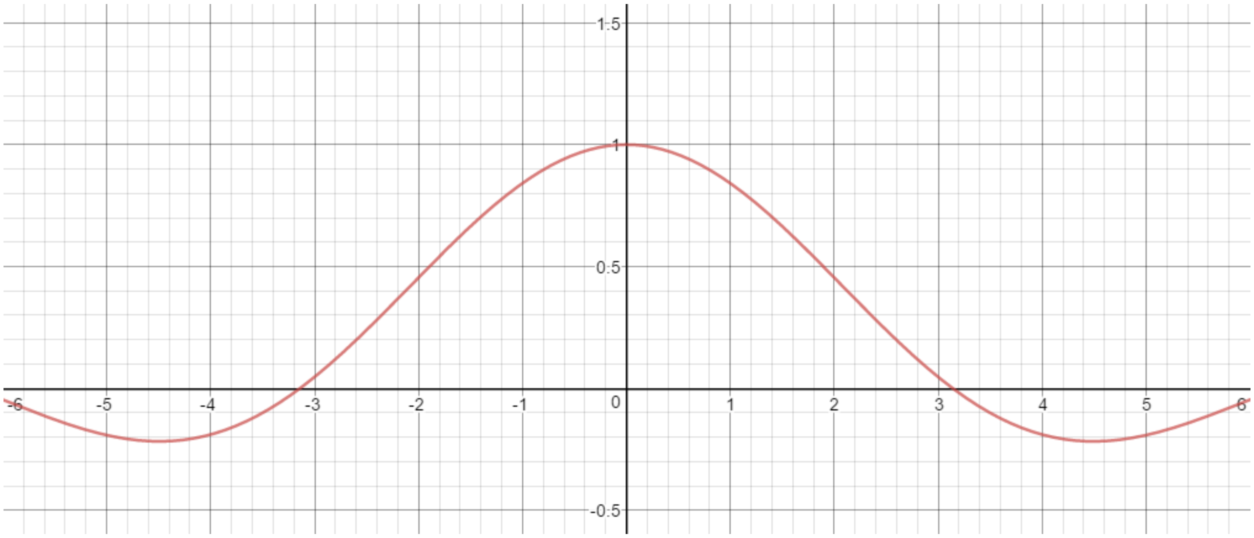
$$\frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} = \frac{2\operatorname{sen}\frac{h}{2}\cos\frac{2x+h}{2}}{h} = \frac{\operatorname{sen}\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cos\left(x + \frac{h}{2}\right)$$

Cuando $h \to 0$, el factor $\cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \to \cos x$ por la continuidad del coseno. Asimismo, el siguiente límite

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

(ver gráfica de la función $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$, la cual tienes a continuación), demuestra que

$$\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = 1$$



Por lo tanto el cociente de diferencias tiene como límite $\cos x$ cuando $h \to 0$. Dicho de otro modo, $f'(x) = \cos x$ para todo x, es decir, la derivada de la función seno es el coseno.

EJEMPLO 5. *Derivada de la función coseno*. Sea $f(x) = \cos x$. Demostraremos que $f'(x) = -\operatorname{sen} x$, esto es, que la derivada de la función coseno es menos la función seno. Hemos de partir ahora de la identidad trigonométrica siguiente:

$$\cos A - \cos B = -2 \operatorname{sen} \frac{A-B}{2} \operatorname{sen} \frac{A+B}{2}$$

Pongamos $A = x + h$ y $B = x$. De manera similar a como se ha procedido en el ejemplo anterior, esto nos conduce a la fórmula

$$\frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = -\frac{2 \operatorname{sen} \frac{h}{2} \operatorname{sen} \frac{2x+h}{2}}{h} = -\frac{\operatorname{sen} \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \operatorname{sen}\left(x + \frac{h}{2}\right)$$

La continuidad de la función seno demuestra que $\operatorname{sen}(x + \frac{h}{2}) \to \operatorname{sen} x$ cuando $h \to 0$. Además, recordemos que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$. Por tanto $f'(x) = -\operatorname{sen} x$.

EJEMPLO 6. *Derivada de la función raíz n-sima*. Si n es un entero positivo, sea $f(x) = x^{1/n}$ para $x > 0$. El cociente de diferencias para f es

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^{1/n} - x^{1/n}}{h}$$

Pongamos $u = (x+h)^{1/n}$ y $v = x^{1/n}$. Tenemos entonces $u^n = x + h$ y $v^n = x$, con lo que $h = u^n - v^n$, y el cociente de diferencias toma la forma (ver ejemplo 3)

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{u - v}{u^n - v^n} = \frac{1}{u^{n-1} + u^{n-2}v + \ldots + uv^{n-2} + v^{n-1}}$$

La continuidad de la función raíz n-sima prueba que $u \to v$ cuando $h \to 0$. Por consiguiente, cada término del denominador del miembro de la derecha tiene límite v^{n-1} cuando $h \to 0$. En total hay n términos, con lo que el cociente de diferencias tiene como límite $\frac{1}{nv^{n-1}} = \frac{v^{1-n}}{n}$. Puesto que $v = x^{1/n}$, esto demuestra que

$$f'(x) = \frac{x^{(1/n)(1-n)}}{n} = \frac{1}{n}x^{1/n-1}$$

EJEMPLO 7. *Continuidad de las funciones que admiten derivadas*. Si una función f tiene derivada en un punto x, es también continua en x. Para demostrarlo, empleamos la identidad

$$f(x+h) = f(x) + h\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)$$

que es válida para $h \neq 0$. Si hacemos que $h \to 0$, el cociente de diferencias del segundo miembro tiende a $f'(x)$ y, puesto que este cociente está multiplicado por un factor que tiende hacia 0, el segundo término del segundo miembro tiende a 0. Esto demuestra que $f(x+h) \to f(x)$ cuando $h \to 0$, y por tanto que f es continua en x (obsérvese que esto es lo mismo que decir, haciendo un adecuado cambio de variable, que $f(x) \to f(a)$ cuando $x \to a$).

Este último ejemplo proporciona un nuevo procedimiento para probar la continuidad de las funciones. Cada vez que establecemos la existencia de una derivada $f'(x)$, establecemos también, al mismo tiempo, la continuidad de f en x. Debería observarse, no obstante, que el recíproco no es cierto. La continuidad en x no implica necesariamente la existencia de la derivada $f'(x)$. Por ejemplo, cuando $f(x) = |x|$, el punto $x = 0$ es de continuidad de f (ya que $f(x) \to f(0) = 0$ cuando $x \to 0$), pero no existe derivada en 0. El cociente de diferencias $\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ es igual a $\frac{|h|}{h}$. Éste vale 1 si $h > 0$ y -1 si $h < 0$, y por consiguiente no tiene límite cuando $h \to 0$.