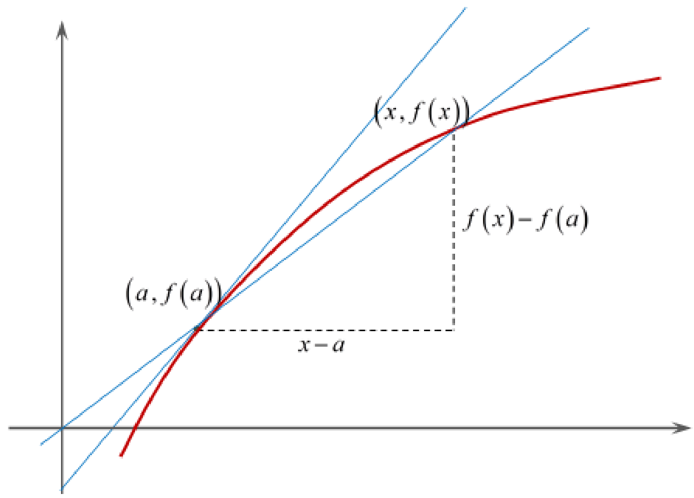
La derivada y la recta tangente a una curva

En la primera mitad del siglo XVII no se conocían métodos generales para calcular la tangente a una curva en un punto de la misma. Este problema se presentaba con frecuencia en mecánica, en óptica y en geometría, y generalmente se resolvía, de forma geométrica, con técnicas adaptadas a cada caso particular. La dificultad está en que, siendo la tangente una recta, se precisa conocer dos puntos de la misma, o bien un punto y su pendiente, para poderla determinar.



Supongamos que queremos hallar la tangente a una curva de ecuación $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$. La estrategia, usada primero por Pierre de Fermat y más tarde por Newton, consiste en aproximar la tangente por rectas secantes cuyas pendientes sí pueden calcularse directamente. En particular, consideremos la recta que une el punto $(a, f(a))$ con un punto cercano $(x, f(x))$, de la gráfica de f. Esta recta recibe el nombre de secante (recta que corta a la curva, pero no es tangente a la curva). La pendiente de esta secante es:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Dicho número suele llamarse cociente incremental de f en a.

Obsérvese que una secante es una buena aproximación de la tangente, siempre que el punto $(x, f(x))$ esté próximo a $(a, f(a))$. Estas consideraciones llevan a definir la tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$ como la recta que pasa por dicho punto y cuya pendiente es igual al límite:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

supuesto, claro está, que dicho límite exista.

Al límite anterior se le llama *derivada* de f en el punto a y se denota por $f'(a)$. También se dice que f es derivable en $x = a$. La recta tangente a la curva en el punto tendrá pues la siguiente ecuación:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

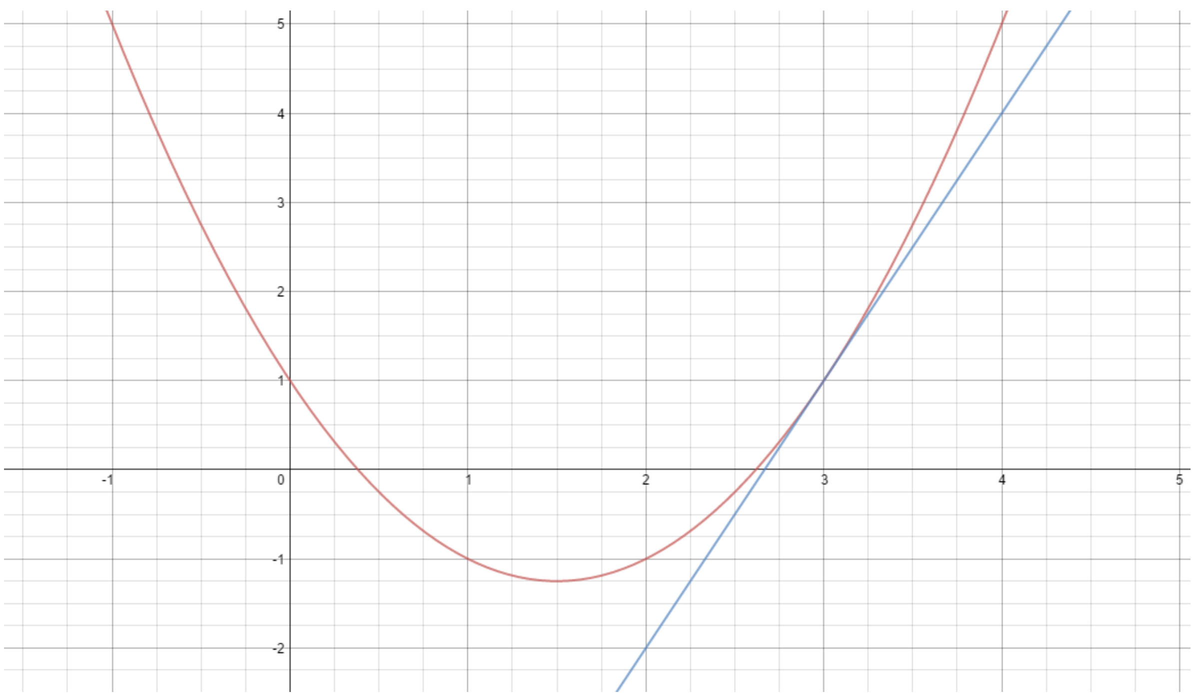
Por ejemplo, si queremos hallar la recta tangente a la curva $y = x^2 - 3x + 1$ en el punto $x = 3$, hemos de aplicar la ecuación anterior. En este caso $(a\,,\,f(a)) = (3\,,\,1)$. Ahora calculamos la derivada en $x = 3$:

$$\lim_{x\to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 3x + 1 - 1}{x - 3} = \lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 3x}{x - 3} = \lim_{x\to 3} \frac{x(x - 3)}{x - 3} = 3$$

Por tanto la recta tangente es:

$$y - 1 = 3(x - 3) \Rightarrow y = 3x - 8$$

En la siguiente representación se aprecia con claridad.



De entre todas las rectas que pasan por el punto $(a, f(a))$ la recta tangente es la que mejor aproxima a la función en las proximidades de dicho punto, en el sentido de que, si f es derivable en $x = a$ y llamamos $g(x) = f'(a)(x - a) + f(a)$, entonces g es la única función que verifica

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - g(x)}{x - a} = 0$$

Vamos a formalizar la idea anterior. Las aplicaciones $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la forma

$$g(x) = mx + m \ , \ \forall\, x \in \mathbb{R}$$

en que m y n son números reales fijos, se suelen llamar *funciones afines* de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ (obsérvese que las funciones afines son aquellas cuya representación gráfica es una línea recta).

Proposición.
Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función real de variable real y $a \in A$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) f es derivable en el punto a.

ii) f es continua en el punto a y existe una función afín g tal que:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - g(x)}{x - a} = 0$$

En caso de que se cumplan i) y ii) la función g viene dada por

$$g(x) = f'(a)(x - a) + f(a) \ , \ \forall\, x \in \mathbb{R}$$

y como consecuencia g es única.

Demostración.
i) $\Rightarrow$ ii) Para $x \in A$ se tiene

$$f(x) = f(a) + (x - a)\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

con lo que, por ser f derivable en el punto a, tenemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

luego f es continua en el punto a. Además, tomando $g(x) = f'(a)(x - a) + f(a)\,, \forall\, x \in \mathbb{R}$ es evidente que g es una función afín ($m = f'(a)$, $n = f(a) - af'(a)$) y se tiene

$$\frac{f(x) - g(x)}{x - a} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \ , \ \forall\, x \in A - \{a\}$$

con lo que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - g(x)}{x - a} = 0$$

ii) $\Rightarrow$ i) Sea $g(x) = mx + n\,, \forall\, x \in \mathbb{R}$. Es claro que $\lim\limits_{x \to a}(f(x) - g(x)) = 0$, con lo que aplicando que f y g son continuas en a tenemos $f(a) = g(a) = ma + n$. Usando esta igualdad obtenemos, para $x \in A$

$$\frac{f(x) - g(x)}{x - a} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \frac{f(a) - g(x)}{x - a} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - m$$

luego

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=m$$

esto es, f es derivable en a con $f'(a)=m$. Finalmente se tiene, para todo x real

$$g(x)=mx+n=f'(a)x+f(a)-f'(a)a=f'(a)(x-a)+f(a)$$

Es importante destacar que la afirmación i) $\Rightarrow$ ii) nos da una relación entre las dos familias más importantes de funciones reales de variable real: toda función derivable en un punto es continua en dicho punto. El recíproco de la anterior afirmación no es cierto: hay funciones continuas que no son derivables: la función valor absoluto es continua en cero pero no es derivable en cero.

La representación gráfica de cualquier función afín $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de la forma

$$h(x)=f(a)+K(x-a)\ ,\ \forall\, x\in\mathbb{R}$$

en que K es cualquier número real, es una recta que pasa por el punto $(a,f(a))$. Tal y como se comentó antes de enunciar la proposición anterior, la función g es una de las descritas, concretamente la que corresponde al valor $K=f'(a)$. El hecho de que es la que mejor aproxima a la función f en las proximidades del punto a viene dado, tal y como se ha demostrado en la proposición, por el hecho de que es la única que verifica

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-g(x)}{x-a}=0$$

Es natural, por tanto, dar a la función g el nombre de *función afín tangente* a la gráfica de la función f en el punto $(a,f(a))$ y llamar a la representación gráfica de g *recta tangente* a la gráfica de f en el punto $(a,f(a))$. Puesto que esta recta tiene ecuación $y=f(a)+f'(a)(x-a)$, resulta que $f'(a)$ no es otra cosa que la "pendiente" de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a,f(a))$. Se vuelve a redundar en lo comentado al principio de este artículo pero, aún a sabiendas de que uno es pesado, también es conveniente no perder nunca de vista que esta es la interpretación geométrica del concepto de derivada.

Proponemos a continuación una serie de ejercicios de los que se da su solución.

1. Sean $f:A\to\mathbb{R}$ y $a\in A$. Probar que f es derivable en a si, y sólo si, existe el siguiente límite

   $$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

   en cuyo caso

   $$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Solución.

Si f es derivable en a, entonces por definición de función derivable en un punto tenemos:

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Llamemos $x = a + h$. Obsérvese que si $x \to a$, entonces $h \to 0$ y se tiene:

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Recíprocamente, si existe

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

usando el mismo cambio de variable anterior se tiene que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

2. Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$. Sea $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(h) = \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}\ ,\ \forall\, h \in \mathbb{R}^*$$

Probar que si f es derivable en a entonces $\lim\limits_{h\to 0} g(h) = f'(a)$. Dar un ejemplo de una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que no sea derivable en un punto a y tal que la correspondiente función g tenga límite en cero.

Solución.

Obsérvese que

$$g(h) = \frac{1}{2}\left[\frac{f(a+h) - f(a)}{h} + \frac{f(a) - f(a-h)}{h}\right]$$

Por el ejercicio anterior tenemos que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

Llamando $x = a - h$, el segundo miembro en la expresión de $g(h)$ es

$$\frac{f(a) - f(x)}{a - x} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

y por tanto

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a) - f(a-h)}{h} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

De este modo:

$$\lim_{h\to 0} g(h) = \frac{1}{2}\left(f'(a)+f'(a)\right) = f'(a)$$

Sea la función valor absoluto:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Sabemos que f no es derivable en cero. Si tomamos entonces $a = 0$ tenemos:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(-h)}{2h} = 0$$

El límite anterior es cero porque

$$f(h)-f(-h) = \begin{cases} h-h=0 & \text{si} \quad h \geqslant 0 \\ -h-(-h)=0 & \text{si} \quad h < 0 \end{cases}$$

3. Sean $f : A \to \mathbb{R}$ y $a \in A$. Supongamos que f es derivable en a. Probar que

$$\exists\, M,\delta \in \mathbb{R}^+ \,:\, x \in A\,, |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(a)| \leqslant M|x-a|$$

¿Es cierta la misma afirmación suponiendo solamente que f es continua en a?

Solución.

Al ser f derivable en a tenemos:

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)\right) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{x-a} = 0$$

Entonces, por la caracterización del límite de una función en un punto tenemos:

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0 \,:\, x \in A\,, 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow \left|\frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{x-a}\right| < \varepsilon$$

La última desigualdad es equivalente a

$$|f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)| < \varepsilon|x-a|$$

Por tanto:

$$|f(x)-f(a)| - |f'(a)(x-a)| \leqslant |f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(x)-f(a)| < \varepsilon|x-a| + |f'(a)||x-a| = \left(\varepsilon + |f'(a)|\right)|x-a|$$

Tomando $M = \varepsilon + |f'(a)|$ se tiene el resultado que se pide.

La afirmación no es cierta suponiendo solamente que f es continua en a. Como ejemplo sea $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{x}$. La función f es continua en $a = 0$, pero no es derivable:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

La expresión anterior tiende a $+\infty$ cuando x tiende a cero. Por tanto, f no es derivable en $a = 0$.

Además, si fuera $|f(x) - f(a)| \leqslant |x - a|$ tendríamos que $|f(x) - f(0)| = |\sqrt{x}| = \sqrt{x} \leqslant Mx$ y entonces $\frac{1}{\sqrt{x}} \leqslant M$, que es una contradicción pues el conjunto $\{\frac{1}{\sqrt{x}} \ : \ x \in \mathbb{R}^+\}$ no está acotado.

4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - x + 1\,, \forall\, x \in \mathbb{R}$. Probar que f es derivable en todo $\mathbb{R}$. Encontrar los puntos de la gráfica de f en los que la recta tangente tenga pendiente 2.

   Solución.

   Sea $a \in \mathbb{R}$. Entonces:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{x^2 - x + 1 - a^2 + a - 1}{x - a} = \frac{x^2 - x - a^2 + a}{x - a} =$$

$$= \frac{(x - a)(x + a - 1)}{x - a} = x + a - 1 \Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a}(x + a - 1) = 2a - 1$$

   y f es derivable en todo $\mathbb{R}$ con $f'(x) = 2x - 1\,, \forall\, x \in \mathbb{R}$.

5. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 + \alpha x + \beta\,, \forall\, x \in \mathbb{R}$. Probar que f es derivable en todo $\mathbb{R}$. Encontrar los valores de α y β que hacen que el punto $(2, 4)$ pertenezca a la gráfica de f y que la recta tangente a la misma en dicho punto sea la recta de ecuación $2x - y = 0$.

   Solución.

   Dado $a \in \mathbb{R}$ tenemos:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{x^2 \alpha x + \beta - a^2 - \alpha a - \beta}{x - a} = \frac{(x - a)(x + a)}{x - a} + \frac{\alpha(x - a)}{x - a} = x + a + \alpha$$

   Entonces:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a}(x + a + \alpha) = 2a + \alpha$$

   y f es derivable en todo $\mathbb{R}$ con $f'(x) = 2x + \alpha\,, \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Si el punto $(2,4)$ pertenece a la gráfica de f, se tiene $f(2) = 2^2 + 2\alpha + \beta = 4$, de donde $2\alpha + \beta = 0$. Además, si la recta tangente a la misma en dicho punto es la recta de ecuación $2x - y = 0$, entonces $f'(2) = 2 \Rightarrow 2 \cdot 2 + \alpha = 2 \Rightarrow \alpha = -2$. Por tanto, $2 \cdot (-2) + \beta = 0 \Rightarrow \beta = 4$.

6. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones $f(x) = x^2 + ax + b$, $g(x) = x^3 - c$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Probar que g es derivable en todo $\mathbb{R}$ (f lo es por el ejercicio anterior). Determinar los valores de a, b, c que hacen que las gráficas de f y g pasen por el punto $(1,2)$ y tengan la misma recta tangente en dicho punto.

   Solución.

   Dado $a \in \mathbb{R}$:
$$\frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \frac{x^3 - c - a^3 + c}{x - a} = \frac{(x^2 + ax + a^2)(x - a)}{x - a} = x^2 + ax + a^2$$
   Entonces
$$\lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} (x^2 + ax + a^2) = 3a^3$$
   Por tanto, g es derivable en todo $\mathbb{R}$ con $g'(x) = 3x^2$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

   Si las gráficas de f y g pasan por el punto $(1,2)$, entonces $f(1) = 2$ y $g(1) = 2$, es decir, $1 + a + b = 2$ y $1 - c = 2$, o lo que es lo mismo, $a + b = 1$ y $c = -1$. Además, si f y g tienen la misma recta tangente en dicho punto, entonces $f'(1) = g'(1) \Rightarrow 2 + a = 3 \Rightarrow a = 1$ y sustituyendo en $a + b = 1$, tenemos $b = 0$.

7. Poner un ejemplo de una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que sea derivable por la izquierda en cero y no sea continua en cero.

   Solución.

   Sea $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } \; -2 \leqslant x \leqslant 0 \\ x + 1 & \text{si } \; 0 < x \leqslant 2 \end{cases}$$
   Tenemos que
$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0 \neq 1 = \lim_{x \to 0^+} f(x)$$
   lo que demuestra que f no es continua en cero. Sin embargo
$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1$$
   de donde se deduce que f es derivable por la izquierda en cero y la derivada por la izquierda en cero vale 1.

8. Sea α un número real. Estudiar la continuidad y derivabilidad en 0 de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \\ x^\alpha & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Solución.

Si $\alpha \neq 0$, tenemos:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0 \quad ; \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \alpha > 0 \\ 1 & \text{si} \quad \alpha = 0 \\ +\infty & \text{si} \quad \alpha > 0 \end{cases}$$

Por tanto, $\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$ solamente cuando $\alpha > 0$, es decir, f es continua en cero si $\alpha > 0$ y no es continua en cero si $\alpha \leqslant 0$. Además:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0 \quad ; \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^\alpha}{x} = \lim_{x \to 0^+} x^{\alpha - 1} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \alpha = 1 \\ 0 & \text{si} \quad \alpha > 1 \\ +\infty & \text{si} \quad 0 < \alpha < 1 \end{cases}$$

En conclusión, f será derivable en cero cuando $\alpha > 1$, y en este caso $f'(0) = 0$.

9. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x + \beta & \text{si} \quad x \leqslant 0 \\ x^2 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

¿Para qué valores de α y β es f derivable en cero?

Solución.

Claramente

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \beta \quad ; \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$$

Entonces para que f sea continua en cero debe ser $\beta = 0$ y en este caso

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \alpha \quad ; \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$$

Así, para que f sea derivable en cero ha de ser $\alpha = 0$. O sea, que para que la función sera continua y derivable en cero debe estar definida del siguiente modo:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \\ x^2 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

10. Estudiar la derivabilidad en cero de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Solución.

Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales distintos de cero convergente a cero. Entonces $\{f(x_n)\} \to 0$, ya sea $x_n \in \mathbb{Q}, \forall n \in \mathbb{N}$; o $x_n \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}, \forall n \in \mathbb{N}$, pues en el primer caso $\{f(x_n)\} = \{x_n^2\}$ y en el segundo $\{f(x_n)\} = \{0\}$. Así, f es continua en cero.

Supongamos ahora que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{Q}$. Entonces

$$\left\{ \frac{f(x_n) - f(0)}{x_n - 0} \right\} = \left\{ \frac{x_n^2}{x_n} \right\} = \{x_n\} \to 0$$

Ahora bien, si $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, tenemos

$$\left\{ \frac{f(x_n) - f(0)}{x_n - 0} \right\} = \{0\} \to 0$$

En todo caso $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$, con lo que f es derivable en cero y $f'(0) = 0$.