Sobre funciones reales de variable real. Composición de funciones. Función inversa

Cuando en matemáticas hablamos de funciones pocas veces nos paramos a pensar en la definición rigurosa de función real de variable real, así como en las operaciones con funciones, en particular de la composición de funciones y el concepto de función inversa de una función en el sentido de la composición de funciones.

En este artículo hablaremos sobre funciones y la terminología utilizada al respecto. Veremos las operaciones con funciones y nos detendremos en una operación fundamental: la composición de funciones.

Definición.
Llamaremos *función real de variable real* a toda aplicación $f : A \to \mathbb{R}$ en que A es un conjunto no vacío de números reales. Diremos también que f es una función real definida en A. Notaremos $F(A, \mathbb{R})$ al conjunto de todas las aplicaciones de A en $\mathbb{R}$.

Haremos notar que, por ser f una aplicación de A en $\mathbb{R}$, para cada $x \in A$ existe exactamente un valor y de f en x, al que es costumbre llamar $y = f(x)$. A veces, al número real x se le llama *original*, y al número real $y = f(x)$ se le llama *imagen* de f en x.

El conjunto A en el que f está definida se llama *dominio de definición* de f, y escribiremos $\operatorname{Dom} f$. En ocasiones la visualización *gráfica* de una función real de variable real resulta muy útil. Dada una función $f : A \to \mathbb{R}$ la gráfica de f es por definición el subconjunto de $\mathbb{R}^2$ siguiente: $\{(x, f(x)) \, : \, x \in A\}$.

Definición.
En el conjunto $F(A, \mathbb{R})$ podemos definir las operaciones *suma y producto* definidas de la siguiente forma. Si $f, g \in F(A, \mathbb{R})$ definimos $f + g, fg \in F(A, \mathbb{R})$ por

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \ \forall\, x \in A$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x), \ \forall\, x \in A$$

La suma de funciones tiene las mismas propiedades que la suma de números reales, precisamente porque, por definición, la suma de dos funciones es la suma de dos números reales. Así, la suma de funciones es asociativa y conmutativa, tiene un elemento neutro, que es la función que vale cero en todo punto de A (función constantemente igual a cero en A), y si $f \in F(A, \mathbb{R})$, el opuesto de f es la función $-f : A \to \mathbb{R}$ definida por $(-f)(x) = -f(x)$ (obsérvese que, en la igualdad anterior, el signo menos del primer miembro indica opuesto de la función f, y el menos del segundo miembro indica opuesto del número real $f(x)$). Con estas propiedades, el conjunto $F(A, \mathbb{R})$, con la operación suma de funciones, tiene estructura de grupo conmutativo, la misma estructura que el conjunto de $\mathbb{R}$ de los números reales con la operación suma de números.

El conjunto $F(A, \mathbb{R})$, con la operación producto, tiene elemento unidad: la función constantemente igual a 1 en A. Además, es muy fácil comprobar que una función $f \in F(A, \mathbb{R})$ tiene elemento inverso si, y solo si, $f(x) \neq 0\,, \forall x \in A$. En este caso, el elemento inverso de f es la función $\frac{1}{f} : A \to \mathbb{R}$ definida por $\frac{1}{f}(x) = \frac{1}{f(x)}\,, \forall x \in A$. Lo comprobaremos a continuación.

El elemento inverso para el producto de funciones hace el mismo papel que el inverso en el conjunto de los números reales para el producto de números. Recordemos que el inverso de un número real x distinto de cero es $\frac{1}{x}$, porque al multiplicar ambos números obtenemos el elemento unidad para el producto de números reales, que es el número 1:

$$x \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x} = 1$$

En el caso del producto de funciones pasa exactamente lo mismo. Supongamos que $f \in F(A, \mathbb{R})$ y que $f(x) \neq 0\,, \forall x \in A$. Entonces

$$\left(f \frac{1}{f}\right)(x) = f(x)\left(\frac{1}{f}\right)(x) = f(x)\frac{1}{f(x)} = \frac{f(x)}{f(x)} = 1\,, \forall\, x \in A$$

Lo que demuestra que el producto de las funciones f y $\frac{1}{f}$ es la función constantemente igual a 1. Hemos utilizado la definición de producto de funciones y el hecho, comentado anteriormente, de que todo número real distinto de cero tiene inverso para el producto de números reales.

Composición de funciones

Antes de definir el concepto de composición de funciones definamos la imagen por una función f de un conjunto A no vacío de números reales, así como el concepto de aplicación o función inyectiva.

Definición.
Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función real de variable real definida en un conjunto no vacío A de número

reales. La *imagen* de A por la función f es, por definición, el siguiente conjunto:

$$f(A) = \{f(x) = y \, : \, x \in A\}$$

A veces también nos referiremos simplemente a la imagen de f, y escribiremos $\operatorname{Im} f$. Es decir:

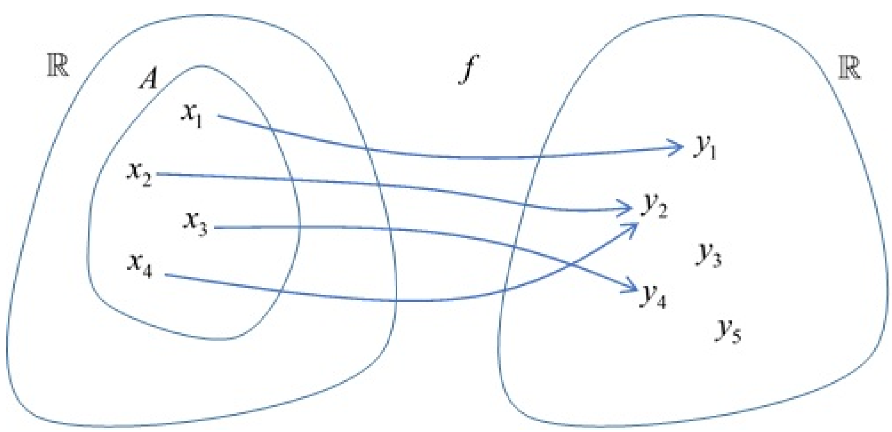
$$\operatorname{Im} f = \{f(x) = y \, : \, x \in \operatorname{Dom} f\}$$

Como ejemplo consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 \,, \forall x \in \mathbb{R}$. En este caso es muy fácil deducir que $f(\mathbb{R}) = \operatorname{Im} f = [0, +\infty)$.

Definición.
Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función real de variable real definida en un conjunto no vacío A de número reales. Se dice que f es *inyectiva* si se cumple la siguiente propiedad:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \,, \forall x_1 \,, x_2 \in A$$

El concepto de función inyectiva viene a expresar que si x_1 y x_2 son elementos distintos de A, entonces tienen imágenes distintas. La figura siguiente ilustra el concepto de función no inyectiva, porque hay dos elementos distintos de A que tienen la misma imagen.



Otro ejemplo de función no inyectiva es la función considerada en el ejemplo anterior: $f(x) = x^2 \,, \forall x \in \mathbb{R}$. La razón es que elementos opuestos tienen la misma imagen, ya que $x^2 = (-x)^2 \,, \forall x \in \mathbb{R}$.

Sin embargo la función $f(x) = \frac{1}{x} \,, \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$, sí que es inyectiva pues

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2 \,, \forall \, x_1 \,, x_2 \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Una forma de pensar en funciones inyectivas es la siguiente: podemos "barrer" el plano $\mathbb{R}^2$ mediante líneas paralelas al eje X. Si alguna de estas líneas toca en más de un punto a la gráfica de f, entonces f no es inyectiva.

Definición.
Si $f : A \to \mathbb{R}$ y $g : B \to \mathbb{R}$ son funciones reales de variable real y $f(A) \subset B$, llamaremos *composición* de f con g a la función $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ definida por $(g \circ f)(x) = g(f(x))\,, \forall x \in A$.

Como ejemplo sean las funciones $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-1}$ y $g(x) = \sqrt{2x-1}$. Calculemos la composición de f con g y la composición de g con f.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{2x-1}) = \frac{\sqrt{2x-1}^2}{\sqrt{2x-1}^2 - 1} = \frac{2x-1}{2x-2}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right) = \sqrt{2\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right) - 1} = \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}$$

Del ejemplo anterior se desprende que la composición de funciones no es conmutativa.

Definición.
Si $f : A \to \mathbb{R}$ es una función real de variable real que sea inyectiva, existe una única función $g : B \to \mathbb{R}$ tal que $(g \circ f)(x) = x\,, \forall x \in A$. Dicha función g se llamará *función inversa* de f y se representará por f^{-1}. Es importante no confundir f^{-1} con el elemento inverso de f en el conjunto $F(A, \mathbb{R})$, supuesto que exista, que habíamos notado $\frac{1}{f}$. Para evitar confusiones diremos que f^{-1} es la inversa de f en el sentido de la composición de aplicaciones.

Hemos de insistir en que para que una función tenga inversa respecto de la composición es imprescindible que sea inyectiva. Si no fuera así, una misma imagen $f(x)$ podría tener más de un original, por lo que la aplicación inversa no sería una función: a un valor $f(x)$ le correspondería más de un valor $f^{-1}(f(x)))$.

La función $i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $i(x) = x\,, \forall\, x \in \mathbb{R}$ recibe el nombre de función *identidad*. La representación gráfica de la función identidad es una recta que pasa por el origen de coordenadas y divide a los cuadrantes primero y tercero en dos partes iguales: la bisectriz de los cuadrantes primero y tercero. Por definición, la composición de una función f y su inversa f^{-1} es conmutativa y el resultado es la función identidad: $(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x$. Abreviadamente $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = i$.

En general, el procedimiento para calcular la función inversa $f^{-1}(x)$ de una función inyectiva $f(x)$, es el siguiente:

a) Hacemos $f(x) = y$.

b) Buscamos la expresión que proporciona x en función de y.

c) A continuación, y para expresar la función hallada como cualquier otra función real de variable real, cambiamos y por x, y x por $f^{-1}(x)$.

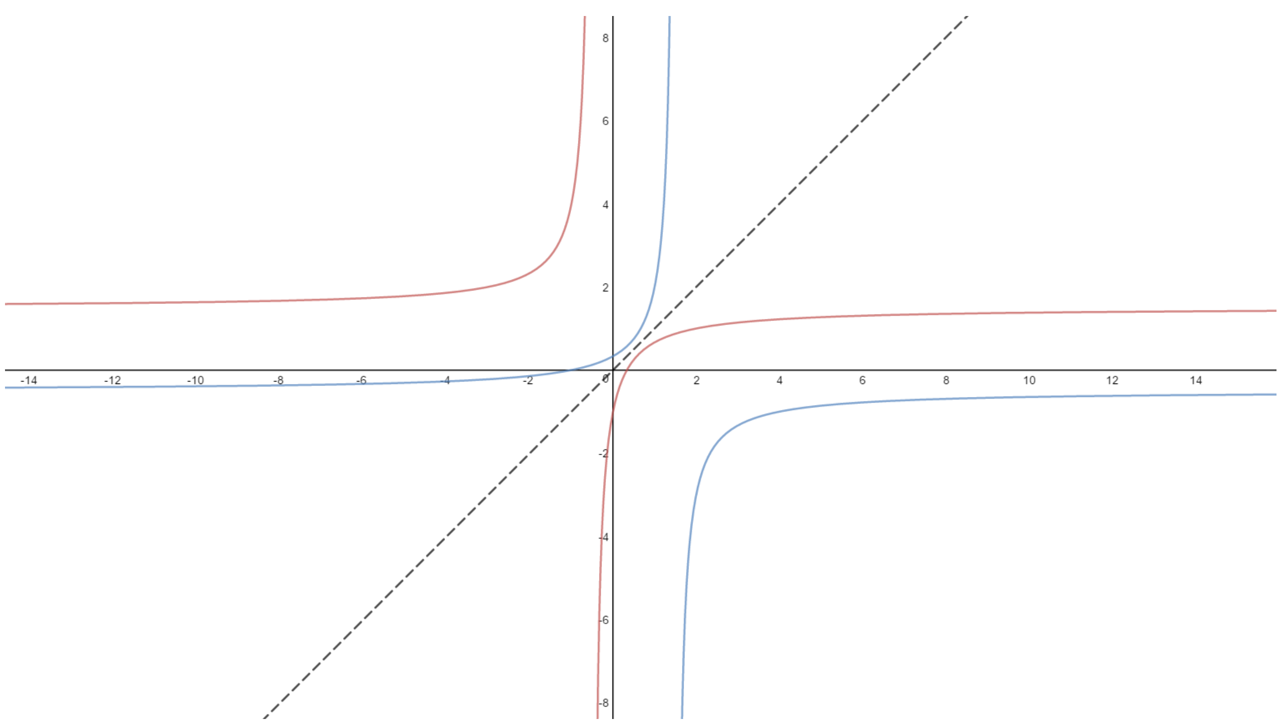
Por ejemplo, para calcular la función inversa de $f(x) = \dfrac{x+1}{3-2x}$, se procede del siguiente modo:

a) Hacemos $y = \dfrac{x+1}{3-2x}$

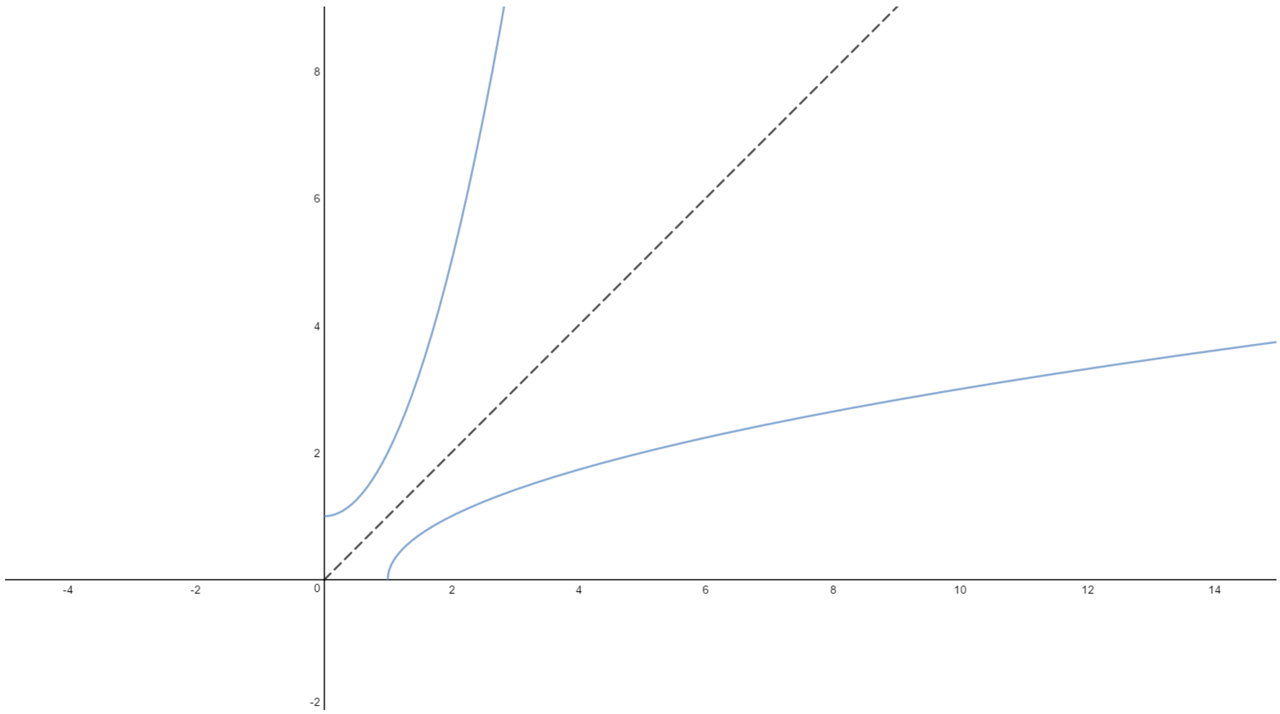
b) $y(3-2x) = x+1 \Rightarrow 3y - 2xy = x+1 \Rightarrow x(2y+1) = 3y-1 \Rightarrow x = \dfrac{3y-1}{2y+1}$

c) $f^{-1}(x) = \dfrac{3x-1}{2x+1}$

Las gráficas de una función f y de su inversa f^{-1}, son simétricas respecto de la bisectriz del primer cuadrante, es decir, respecto de la gráfica de la función identidad. En la siguiente figura se puede observar que las dos ramas de la hipérbola $f(x) = \dfrac{x+1}{3-2x}$ son claramente simétricas, respecto de la bisectriz del primer cuadrante, de las respectivas ramas de la hipérbola $f^{-1}(x) = \dfrac{3x-1}{2x+1}$.



Hay funciones no inyectivas, como $f(x) = x^2 + 1$, en las que se puede restringir el dominio para que sean inyectivas y poder calcular su inversa respecto de la composición. En este caso, si se restringe el dominio de $f(x) = x^2 + 1$ a $[0, +\infty]$, cada valor del nuevo dominio sólo posee una imagen, por lo que la función inversa será: $f^{-1}(x) = +\sqrt{x-1}$, con el signo positivo para evitar dos imágenes para un mismo valor de x. La representación gráfica de ambas es la siguiente:



En otro artículo veremos la relación entre derivación y composición de funciones, y deduciremos la conocida regla de la cadena, de uso extremadamente útil para el cálculo de derivadas de funciones.