Completando cuadrados. Integrales tipo arcotangente

La pregunta es: ¿cómo podemos completar un cuadrado para obtener cualquier polinomio de grado dos?
Dicho de otra manera: si ax^2+bx+c es un polinomio de grado dos (con lo cual supondremos que $a\neq 0$), ¿cómo hacer para expresarlo como un cuadrado completado? Es decir, ¿podremos conseguir la siguiente expresión?

$$ax^2+bx+c=a\left((x+m)^2+n^2\right)$$

La respuesta es afirmativa. En primer lugar, lo vamos a ver con un ejemplo concreto, en el que daremos los pasos pertinentes para conseguir nuestro objetivo.

Sea el polinomio $2x^2-6x+5$. Vamos a hallar dos números m y n de tal forma que

$$2x^2-6x+5=2\left((x-m)^2+n^2\right)$$

Paso 1

Consiste en extraer factor común el coeficiente líder o principal. Para ello dividimos entre tal coeficiente todos los términos del polinomio, cosa que podemos hacer pues hemos supuesto que $a\neq 0$. En nuestro ejemplo concreto tenemos:

$$2x^2-6x+5=2\left(x^2-3x+\frac{5}{2}\right)$$

Paso 2

Multiplicamos el término en x (o término de grado uno) por 2 y por $\frac{1}{2}$ (con lo cual realmente no estamos modificando nuestra expresión):

$$2x^2-6x+5=2\left(x^2-2\cdot\frac{1}{2}\cdot 3x+\frac{5}{2}\right)$$

Ahora vamos a escribir este término en x de la forma $2\cdot x\cdot m$ (con lo que aparecerá el número m que buscábamos al principio):

$$2x^2-6x+5=2\left(x^2-2\cdot x\cdot\frac{3}{2}+\frac{5}{2}\right)$$

Puesto que $(x-m)^2=x^2-2\cdot x\cdot m+m^2$, nos damos cuenta fácilmente de que $m=\frac{3}{2}$. Para completar el cuadrado nos hará falta que aparezca el cuadrado de m por algún sitio.

Paso 3

Sumamos y restamos m^2. En nuestro ejemplo, como $m=\frac{3}{2}$, este paso queda así:

$$2x^2-6x+5=2\left(x^2-2\cdot x\cdot\frac{3}{2}+\frac{5}{2}\right)=2\left(x^2-2\cdot x\cdot\frac{3}{2}+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}+\frac{5}{2}\right)$$

Ahora es fácil darse cuenta de que los tres primeros términos del último paréntesis son justamente el cuadrado de una diferencia:

$$2x^2-6x+5=2\left(x^2-2\cdot x\cdot\frac{3}{2}+\frac{5}{2}\right)=2\left(x^2-2\cdot x\cdot\frac{3}{2}+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}+\frac{5}{2}\right)=2\left(\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+\frac{5}{2}\right)$$

Como resulta que $-\frac{9}{4}+\frac{5}{2}=\frac{1}{4}$, tenemos finalmente el cuadrado completado:

$$2x^2-6x+5=2\left(\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right)$$

Obsérvese que en nuestro ejemplo el valor de n es $\frac{1}{2}$ pues $n^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$.

Nos podemos plantear el cálculo de m y n en función de los coeficientes a, b y c. Aunque siguiendo los pasos anteriores es más fácil hacer casos concretos, particulares. De todas formas, vamos a verlo.

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(x^2+2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(x^2+2\cdot x\cdot\frac{b}{2a}+\frac{c}{a}\right)=$$

$$=a\left(x^2+2\cdot x\cdot\frac{b}{2a}+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-b^2+4ac}{4a^2}\right)$$

O sea:

$$m=\frac{b}{2a}\ ;\ n^2=\frac{-b^2+4ac}{4a^2}\Rightarrow n=\frac{\sqrt{-b^2+4ac}}{2a}$$

Usando estas fórmulas es también muy sencillo obtener los valores de m y de n para casos concretos.

La fórmula de las soluciones de la ecuación de segundo grado

Por cierto, es posible que se perciba el parecido de estas fórmulas con la con la conocida fórmula que proporciona las soluciones de una ecuación de segundo grado. Pero es que tal fórmula se obtiene del cuadrado completado.

$$ax^2+bx+c=0\Leftrightarrow a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-b^2+4ac}{4a^2}\right)=0\Leftrightarrow\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-b^2+4ac}{4a^2}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{-b^2+4ac}{4a^2}\Leftrightarrow\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}\Leftrightarrow x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\Leftrightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Cálculo de primitivas. Integrales tipo arcotangente

Además de que la técnica de completar cuadrados nos ha servido para obtener la fórmula de las soluciones de una ecuación de segundo grado, también se usa para calcular primitivas de ciertas funciones.

Recordemos que la derivada de $y=\operatorname{arctg} x$ es $y'=\dfrac{1}{x^2+1}$ y, en general tenemos que

$$y=\operatorname{arctg} f(x) \Rightarrow y'=\frac{f'(x)}{f(x)^2+1}$$

Por eso, las integrales de tipo arcotangente son del siguiente modo.

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)^2+1}\,dx=\operatorname{arctg} f(x)+C$$

Pues bien, las integrales del tipo

$$\int \frac{k}{ax^2+bx+c}\,dx$$

en las que el polinomio ax^2+bx+c no tiene raíces reales, son precisamente del tipo arcotangente anterior. Usemos nuestro ejemplo en el que hemos completado el cuadrado para verlo.

$$\int \frac{1}{2x^2-6x+5}\,dx=\int \frac{1}{2\left(\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right)}\,dx=\frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}\,dx=$$

Si multiplicamos por 4 todos los términos del numerador y del denominador tenemos:

$$=\frac{1}{2}\int \frac{4}{4\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+1}\,dx=\frac{1}{2}\int \frac{4}{(2x-3)^2+1}\,dx=\frac{1}{2}\int \frac{2\cdot 2}{(2x-3)^2+1}\,dx=\int \frac{2}{(2x-3)^2+1}\,dx=\operatorname{arctg}(2x-3)+C$$

Obsérvese que hemos utilizado lo siguiente:

$$4\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=2^2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=\left(2\left(x-\frac{3}{2}\right)\right)^2=\left(2x-\frac{6}{2}\right)^2=(2x-3)^2$$

A veces se ve mejor el cálculo de la integral usando un cambio de variable:

$$\int \frac{1}{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}\,dx=\left[x-\frac{3}{2}=t\Rightarrow dx=dt\right]=\int \frac{1}{t^2+\frac{1}{4}}\,dt=\int \frac{1}{\frac{4t^2+1}{4}}\,dt=$$

$$=\int \frac{4}{(2t)^2+1}\,dt=2\int \frac{2}{(2t)^2+1}\,dt=2\operatorname{arctg} 2t+C=2\operatorname{arctg}\left(2\left(x-\frac{3}{2}\right)\right)+C=2\operatorname{arctg}(2x-3)+C$$

Pero esto ya es cuestión de gustos.