Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I

Ejercicios de Binomial y Normal

1. El 20 % de la población de una ciudad es inmigrante de procedencia africana. Se eligen cinco personas al azar. Determina la probabilidad de que:

   a) Las cinco sean inmigrantes africanos.

   b) Haya, al menos, un africano.

   Solución

   Llamemos éxito a "ser inmigrante de procedencia africana". La variable número de éxitos, o "número de inmigrantes de procedencia africana", sigue una distribución binomial con $n=5$ y $p=0,2$.

   a) $P(X=5)=\binom{5}{5}\cdot 0,2^5\cdot 0,8^0=0,00032$. Podemos decir que la probabilidad de que las cinco personas sean inmigrantes africanos es prácticamente nula.

   b) $P(X\geq 1)=1-P(X<1)=1-P(X=0)=1-\binom{5}{0}\cdot 0,2^0\cdot 0,8^5=1-0,32768=0,67232$.

2. Si de 650 alumnos de Bachillerato sólo 200 aprueban Matemáticas, halla la probabilidad de que al elegir 5 de estos alumnos al azar:

   a) Ninguno apruebe Matemáticas.

   b) Al menos cuatro aprueben.

   Solución

   Llamemos éxito a "aprobar Matemáticas". La variable número de éxitos, o número de alumnos que aprueban Matemáticas, se distribuye según una binomial con $n=5$ y $p=\frac{200}{650}=\frac{4}{13}$.

   a) $P(X=0)=\binom{5}{0}\cdot\left(\frac{4}{13}\right)^0\cdot\left(\frac{9}{13}\right)^5=\left(\frac{9}{13}\right)^5=0{,}159$.

   b) $P(X=4)+P(X=5)=\binom{5}{4}\cdot\left(\frac{4}{13}\right)^4\cdot\left(\frac{9}{13}\right)^1+\binom{5}{5}\cdot\left(\frac{4}{13}\right)^5\cdot\left(\frac{9}{13}\right)^0=$

   $$=5\cdot\frac{4^4\cdot 9}{13^5}+\frac{4^5}{13^5}=\frac{4^4\cdot(45+4)}{13^5}=\frac{4^4\cdot 49}{13^5}=0,0338.$$

3. Se sabe que el 75% de los enfermos de una dolencia tratados con un nuevo fármaco mejoran sus condiciones de vida. Se eligen al azar 8 de estos enfermos. Calcula la probabilidad de que:

   a) Al menos 6 mejoren sus condiciones de vida.

   b) Como máximo 6 mejoren sus condiciones de vida.

   Solución

   Llamemos éxito a "un enfermo mejora de la dolencia o, lo que es lo mismo, mejora sus condiciones de vida". La variable número de éxitos, o "número de enfermos que mejoran sus condiciones de vida", sigue una distribución binomial con $n=8$ y $p=0,75$.

a) $P(X \geq 6) = P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) =$

$$= \binom{8}{6} \cdot 0.75^6 \cdot 0,25^2 + \binom{8}{7} \cdot 0.75^7 \cdot 0,25^1 + \binom{8}{8} \cdot 0.75^8 \cdot 0,25^0 = 0,3115 + 0,267 + 0,1001 = 0,6786 .$$

b) $P(X \leq 6) = 1 - P(X > 6) = 1 - \left[P(X = 7) + P(X = 8) \right] =$

$$= 1 - \left[\binom{8}{7} \cdot 0.75^7 \cdot 0,25^1 + \binom{8}{8} \cdot 0.75^8 \cdot 0,25^0 \right] = 1 - (0,267 + 0,1001) = 1 - 0,3671 = 0,6329 .$$

4. Se va a construir una planta nuclear en cierta comunidad. Se sabe que el 80% de la población se opone a ello y el 20% restante está a favor.
   a) Si se elige al azar una muestra de 5 personas, ¿cuál es la probabilidad de que 3 o más estén a favor de la construcción?
   b) Si se elige al azar una muestra de 20 personas, ¿cuál es la probabilidad de que todas estén en contra de la construcción?

Solución

Llamemos éxito a "oponerse a la construcción". Entonces, el número de éxitos se distribuyen según una binomial con $p = 0,8$.

a) En este caso $n = 5$. Además, que tres o más estén a favor de la construcción, es lo mismo que dos o menos estén en contra. Por tanto:

$$P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \binom{5}{0} \cdot 0,8^0 \cdot 0,2^5 + \binom{5}{1} \cdot 0,8^1 \cdot 0,2^4 + \binom{5}{2} \cdot 0,8^2 \cdot 0,2^3 =$$

$$= 0,2^5 + 5 \cdot 0,8 \cdot 0,2^4 + 10 \cdot 0,8^2 \cdot 0,2^3 = 0,00032 + 0,0064 + 0,0512 = 0,05792 .$$

b) En este caso $n = 20$. Entonces:

$$P(X = 20) = \binom{20}{20} \cdot 0,8^{20} \cdot 0,2^0 = 0,8^{20} = 0,01153 .$$

5. Por encuestas realizadas se sabe que la intención de voto al partido mayoritario en las elecciones locales es del 62 %. Elegida una muestra al azar formada por 10 personas, se desea saber la probabilidad de que voten a dicho partido:
   a) Exactamente 6 personas.
   b) Más de 2 personas y menos de 5.
   c) Si en la ciudad se espera que ejerzan el derecho al voto 865000 personas, ¿cuántas de ellas se espera que voten a dicho partido?

Solución

Si llamamos éxito a "votar al partido mayoritario", la variable número de éxitos, o número de votos hacia el partido mayoritario, se distribuye según una binomial con $n = 10$ y $p = 0,62$.

a) $P(X = 6) = \binom{10}{6} \cdot 0,62^6 \cdot 0,38^4 = 0,2487$.

b) $P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) = \binom{10}{3} \cdot 0,62^3 \cdot 0,38^7 + \binom{10}{4} \cdot 0,62^4 \cdot 0,38^6 + \binom{10}{5} \cdot 0,62^5 \cdot 0,38^5 =$

$=0,0327+0,0934+0,1829=0,309$.

c) Se pide la media de personas que votarán a dicho partido. En una binomial, la media viene dada por $\overline{x}=np$. En este caso $\overline{x}=865000\cdot 0,62=536300$. Es decir, se espera que voten a dicho partido unas 536300 personas.

6. La longitud de las truchas de una piscifactoría sigue una normal de media 23,75 cm y desviación típica 3 cm. Solo se comercializan aquellas cuya longitud está comprendida entre 20 y 26 cm.

a) ¿Qué porcentaje del total representan?

b) ¿Cuál es la longitud para la cual el 80 % de la población tiene una longitud superior?

Solución

Llamemos X a la variable "longitud de una trucha". Entonces $X\to N(23,75\ ;\ 3)$.

a) $P(20\leq X\leq 26)=P\left(\dfrac{20-23,75}{3}\leq Z\leq\dfrac{26-23,75}{3}\right)=P(-1,25\leq Z\leq 0,75)=$

$=P(Z\leq 0,75)-P(Z\leq -1,25)=P(Z\leq 0,75)-P(Z\geq 1,25)=P(Z\leq 0,75)-\left[1-P(Z\leq 1,25)\right]=$

$=0,7734-(1-0,8944)=0,7734-0,1056=0,6658$, lo que significa un porcentaje del $66,58\ \%$.

b) Llamemos x a esa longitud. Entonces, según el enunciado, $P(X>x)=0,8$. Esto indica que debe ser $x<23,75$ porque la probabilidad de estar por encima de la media es $0,5$ y la de estar por encima de x es $0,8$. Entonces, al tipificar, hemos de tener en cuenta que $\dfrac{x-23,75}{3}<0$.

Por tanto: $P(X>x)=0,8\Rightarrow P\left(Z>\dfrac{x-23,75}{3}\right)=0,8\Rightarrow P\left(Z<\dfrac{23,75-x}{3}\right)=0,8$.

Mirando en la tabla de la distribución normal estándar tenemos que:

$\dfrac{23,75-x}{3}=0,84\Rightarrow 23,75-x=2,52\Rightarrow x=23,75-2,52=21,23$.

Esto indica que el 80 % de la población tiene una longitud superior a 21,23 cm.

7. Supón que, en cierta población pediátrica, la presión sistólica de la sangre en reposo se distribuye normalmente con media de 115 mm Hg y desviación típica de 15.

a) Halla la probabilidad de que un niño elegido al azar en esta población tenga presión sistólica superior a 145 mm Hg.

b) ¿Por debajo de qué valor de presión sistólica estará el 75 % de los niños?

Solución

Sea X la variable "presión sistólica". Entonces $X\to N(115,15)$.

a) $P(X>145)=P\left(Z>\dfrac{145-115}{15}\right)=P(Z>2)=1-P(Z<2)=1-0,9772=0,0228$.

b) Llamemos x al valor de la presión sistólica por debajo del cual está el 75 % de los niños. Simbólicamente, $P(X<x)=0,75$. Está claro que x ha de ser mayor que la media, ya que la media deja por debajo una

probabilidad $0,5$. Esto es: $x > 115 \Rightarrow \frac{x-115}{15} > 0$. Esto lo hemos de tener en cuenta a la hora de tipificar y de aplicar las fórmulas correspondientes. Veamos: $P(X < x) = 0,75 \Rightarrow P\left(Z < \frac{x-115}{15}\right) = 0,75$.

Mirando ahora en el interior de la tabla de la distribución normal estándar tenemos que:

$\frac{x-115}{15} = 0,67 \Rightarrow x = 15 \cdot 0,67 + 115 \Rightarrow x = 125,05$.

8. Se sabe que los resultados de un examen de Filosofía se distribuyen según una distribución normal con una media de 7 y una varianza de 4. Se pide:

   a) La probabilidad de que un estudiante que se presenta al examen obtenga una calificación superior a 8.

   b) La calificación mínima para aprobar si se desea que solamente superen la prueba el 33 % de los estudiantes.

Solución

Llamemos X a la variable "calificación en el examen de Filosofía". Entonces $X \to N(7,4)$.

a) $P(X > 8) = P\left(Z > \frac{8-7}{4}\right) = P(Z > 0,25) = 1 - P(Z < 0,25) = 1 - 0,5987 = 0,4013$.

b) Llamemos x a la calificación mínima para aprobar. Entonces, como se desea que solamente superen la prueba el 33 % de los estudiantes, la probabilidad de estar por encima de la nota x (nota de corte), debe ser 0,33: $P(X > x) = 0,33$. Esto indica que x debe ser mayor que la media, que es 7 (cosa que es natural en este caso). Pero, además, la razón es que la probabilidad por encima de la media es $0,5$ y por encima de x es $0,33$. Basta imaginarse la curva normal o campana de Gauss para darse cuenta de que $x > 7$. Esto es importante, porque al tipificar tendremos que $\frac{x-7}{4} > 0$, cosa que nos servirá para saber qué fórmula hemos de aplicar para luego poder mirar en la tabla de la distribución normal estándar. Dicho esto:

$P(X > x) = 0,33 \Rightarrow P\left(Z > \frac{x-7}{4}\right) = 0,33 \Rightarrow 1 - P\left(Z < \frac{x-7}{4}\right) = 0,33 \Rightarrow P\left(Z < \frac{x-7}{4}\right) = 0,67$.

Ahora, mirando en la tabla tenemos que $\frac{x-7}{4} = 0,44 \Rightarrow x = 0,44 \cdot 4 + 7 \Rightarrow x = 8,76$.

Por tanto, la calificación mínima para aprobar si se desea que solamente superen la prueba el 33 % de los estudiantes, es 8,76.

9. La probabilidad de que un golfista haga hoyo en un cierto tipo de lanzamiento es de 0,2. Si hiciera 10 000 lanzamientos y su capacidad de acierto se mantuviera (ni aumentara por la práctica ni disminuyera por el cansancio), ¿qué probabilidad habría de que acertase más de 2080 veces?

Solución

Llamemos éxito a que "el golfista acierte o que haga hoyo". La variable X, número de éxitos, o "número de veces que el golfista acierta", sigue una distribución binomial con $n = 10000$ y $p = 0,2$.

Puesto que $np = 10000 \cdot 0,2 = 2000 > 5$ y $nq = 10000 \cdot 0,8 = 8000 > 5$, la variable X se puede aproximar por una normal de media $\mu = np = 2000$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{10000 \cdot 0,2 \cdot 0,8} = 40$. Es decir:

$$X \to B(10000\ ;\ 0,2) \Rightarrow X \to N(2000, 40)$$

Entonces: $P(X>2080)=P\left(Z>\dfrac{2080-2000}{40}\right)=P(Z>2)=1-P(Z<2)=1-0,9772=0,0228$.

Observación:

Se da por correcta la anterior solución. Sin embargo, es importante hacer notar que, la forma realmente rigurosa de hacer la parte final de este problema es la que se explica a continuación.

Cuando se aproxima una binomial por una normal, se suele usar la ***corrección por continuidad*** para que los resultados sean mejores o, si se quiere, "más exactos". Puesto que la distribución normal es continua, la probabilidad de ser igual a un número concreto, $P(X=x)$, es igual a cero. Por eso ocurre que, en la distribución normal, las probabilidades no varían si la desigualdad es o no es estricta. En nuestro caso tendríamos que $P(X>2080)=P(X\geq 2080)$. Como nosotros no queremos que se incluya el valor $x=2080$ (pues se pide acertar más de 2080 veces), se hace una pequeña corrección y se suma $0,5$. O sea:

$$P(X>2080)=P(X>2080,5)=P\left(Z>\frac{2080,5-2000}{40}\right)=P(Z>2,01)=$$

$$=1-P(Z<2,01)=1-0,9778=0,0222\,.$$

Cuando se cumplen las condiciones de aproximación de la binomial por una normal y, además, n es "muy grande", esta corrección apenas se nota. Pero esto no ocurre así en los casos en que el valor de n es "pequeño".

Para saber más, y hacerlo todo bien, se recomienda leer la sección *10.5 Corrección por continuidad*, de los apuntes de distribución binomial y normal.

10. Se estima que uno de cada cuatro individuos de una zona tiene determinada enfermedad. Si se toma una muestra al azar de 120 individuos, hallar la probabilidad de que existan más de 52 individuos enfermos.

Solución

Llamemos éxito a "tener la enfermedad". Entonces la variable número de éxitos se distribuye según una binomial con $p=\dfrac{1}{4}=0,25$ y $n=120$. Nos piden hallar $P(X>52)$. Pero solamente con la función de probabilidad de la binomial, esto sería demasiado costoso.

Puesto que $np=120\cdot 0,25=30>5$ y $nq=120\cdot 0,75=90>5$, podemos aproximar la binomial por una normal de media $\mu=np=30$ y desviación $\sigma=\sqrt{npq}=\sqrt{120\cdot 0,25\cdot 0,75}=4,74$. De este modo:

$$P(X>52)=P\left(Z>\frac{52-30}{4,74}\right)=P(Z>4,64)=1-P(Z<4,64)=1-1=0\,.$$ (¿Por qué $P(Z<4,64)=1$?)

De aquí deducimos que no es nada probable que haya más de 52 individuos enfermos.

Observación:

Se da por correcta la anterior solución. Sin embargo, es importante hacer notar que, la forma realmente rigurosa de hacer la parte final de este problema es la que se explica a continuación.

Cuando se aproxima una binomial por una normal, se suele usar la ***corrección por continuidad*** para que los resultados sean más fiables o, si se quiere, "más exactos". Puesto que la distribución normal es continua, la probabilidad de ser igual a un número concreto, $P(X=x)$, es igual a cero. Por eso ocurre que, en la distribución normal, las probabilidades no varían si la desigualdad es o no es estricta. En nuestro caso tendríamos que $P(X>52)=P(X\geq 52)$. Como nosotros no queremos que se incluya el valor $x=52$ (pues se pide que existan más de 52 individuos enfermos), se hace una "pequeña corrección" y se suma $0,5$. O sea:

$$P(X>52)=P(X\geq 52+0,5)=P(X\geq 52,5)=P\left(Z\geq\frac{52,5-30}{4,74}\right)=$$
$$=P(Z\geq 4,75)=1-P(Z\leq 4,75)=1-1=0\,.$$

Volvemos a obtener la misma probabilidad que anteriormente.

Cuando se cumplen las condiciones de aproximación de la binomial por una normal y, además, n es “muy grande”, esta corrección apenas se nota. Pero esto no ocurre así en los casos en que el valor de n es “pequeño”. Por ejemplo, en este caso no se nota ninguna diferencia.

Para saber más, y hacerlo todo bien, se recomienda leer la sección *10.5 Corrección por continuidad*, de los apuntes de distribución binomial y normal.