Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I

Ejercicios de Binomial y Normal

1. En un laboratorio de análisis clínicos saben que el 98 % de las pruebas de diabetes que realizan resulta negativo. Si han recibido 10 muestras para analizar:

   a) Determina la probabilidad de que haya dos personas a las que la prueba les dé positivo.

   b) ¿Cuál es la probabilidad de que la prueba resulte positiva a más de una persona?

   Solución

   Llamemos éxito a "el resultado la prueba de diabetes da positivo". Su probabilidad es $p=0,02$ (ya que el 98 % de las pruebas de diabetes que realizan resulta negativo). La variable "número de éxitos", o "número de veces que la prueba da positivo", se distribuye mediante una binomial con $n=10$ y $p=0,02$.

   a) $P(X=2)=\binom{10}{2}\cdot 0,02^2\cdot 0,98^8=0,0153$.

   b) Que la prueba resulte positiva a más de una persona es lo contrario de que resulte positiva a una o menos:

   $$P(X>1)=1-P(X\leq 1)=1-\left[P(X=0)+P(X=1)\right]=1-\left[\binom{10}{0}\cdot 0,02^0\cdot 0,98^{10}+\binom{10}{1}\cdot 0,02^1\cdot 0,98^9\right]=$$

   $$=1-(0,817+0,167)=1-0,984=0,016.$$

2. Un examen de opción múltiple está compuesto por 9 preguntas, con 4 posibles respuestas cada una, de las cuales solo una es correcta. Suponiendo que uno de los estudiantes que realiza el examen responda al azar:

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que conteste correctamente a 6 preguntas?

   b) ¿Cuál es la probabilidad de que no acierte ninguna?

   Solución

   Llamemos éxito a "contestar correctamente a una pregunta". La variable número de éxitos, o "número de preguntas correctamente contestadas", se distribuye según una binomial con $n=9$ y $p=\frac{1}{4}=0,25$.

   a) $P(X=6)=\binom{9}{6}\cdot 0,25^6\cdot 0,75^3=0,00865$.

   b) $P(X=0)=\binom{9}{0}\cdot 0,25^0\cdot 0,75^9=0,75^9=0,075$.

3. Si el 20% de los cerrojos producidos por una máquina son defectuosos, determina la probabilidad de que entre 4 cerrojos elegidos al azar:

   a) Uno sea defectuoso.

   b) Como mucho, dos sean defectuosos.

   Solución

   Llamemos éxito a "cerrojo defectuoso". Entonces el número de cerrojos defectuosos sigue una distribución binomial con $n=4$ y $p=0,2$.

a) $P(X=1)=\binom{4}{1}\cdot 0,2^1\cdot 0,8^3=4\cdot 0,2\cdot 0,512=0,4096$.

b) $P(X\leq 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=\binom{4}{0}\cdot 0,2^0\cdot 0,8^4+\binom{4}{1}\cdot 0,2^1\cdot 0,8^3+\binom{4}{2}\cdot 0,2^2\cdot 0,8^2=$

$=1\cdot 1\cdot 0,4096+4\cdot 0,2\cdot 0,512+6\cdot 0,04\cdot 0,64=0,4096+0,4096+0,1536=0,9728$.

4. La probabilidad de que un hombre acierte en el blanco es de 1/4. Si dispara 10 veces:

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que acierte exactamente en tres ocasiones?

   b) ¿Cuál es la probabilidad de que acierte al menos una vez?

   Solución

   Llamemos éxito a "acertar en el blanco". La variable "número de éxitos" o "número de veces que se acierta en el blanco", se distribuye según una binomial con $n=10$ y $p=\frac{1}{4}=0,25$.

   a) $P(X=3)=\binom{10}{3}\cdot 0,25^3\cdot 0,75^7=0,2503$.

   b) Acertar al menos una vez es justamente lo contrario de no acertar ninguna. Entonces:

   $P(X\geq 1)=1-P(X<1)=1-P(X=0)=1-\binom{10}{0}\cdot 0,25^0\cdot 0,75^{10}=1-0,75^{10}=1-0,0563=0,9437$.

5. Una prueba de inteligencia está compuesta de 10 preguntas, cada una de las cuales tiene cuatro respuestas, siendo solo una de ellas correcta. Un alumno tiene prisa por acabar la prueba y decide contestar "a lo loco", es decir, aleatoriamente. Se pide:

   a) Probabilidad de acertar al menos ocho.

   b) Probabilidad de acertar a lo sumo tres.

   Solución

   Llamemos éxito a "contestar correctamente una pregunta". La variable número de éxitos, o número de preguntas acertadas", de entre las 10 que tiene la prueba, se distribuye según una binomial con $n=10$ y $p=0,25$.

   a) $P(X\geq 8)=P(X=8)+P(X=9)+P(X=10)=$

   $=\binom{10}{8}\cdot 0,25^8\cdot 0,75^2+\binom{10}{9}\cdot 0,25^9\cdot 0,75^1+\binom{10}{10}\cdot 0,25^{10}\cdot 0,75^0=$

   $=0,00039+0,00003+0,000001=0,000421$.

   O sea, podemos afirmar que, si contestamos "a lo loco", la probabilidad de acertar ocho preguntas o más, es prácticamente nula.

   b) $P(X\leq 3)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=$

   $=\binom{10}{0}\cdot 0,25^0\cdot 0,75^{10}+\binom{10}{1}\cdot 0,25^1\cdot 0,75^9+\binom{10}{2}\cdot 0,25^2\cdot 0,75^8+\binom{10}{3}\cdot 0,25^3\cdot 0,75^7=$

   $=0,0563+0,1877+0,2816+0,2503=0,7759$.

Como vemos, si contestamos al azar las 10 preguntas, acertaremos tres o menos casi en el 78 % de las ocasiones.

6. Los pesos de los habitantes adultos de una ciudad se distribuyen normalmente con media de 75 kg y desviación típica de 4 kg.

a) ¿Cuál será la probabilidad de que el peso de un habitante de esa ciudad esté entre 61 y 83 kg?

b) ¿Qué probabilidad hay de que una persona de esa ciudad pese más de 105 kg?

Solución

Llamemos X a la variable "peso de un habitante adulto". Entonces $X \to N(75,4)$.

a) $P(61 < X < 83) = P\left(\frac{61-75}{4} < Z < \frac{83-75}{4}\right) = P(-3,5 < Z < 2) = P(Z < 2) - P(Z < -3,5) =$

$= P(Z < 2) - P(Z > 3,5) = P(Z < 2) - \left[1 - P(Z < 3,5)\right] = 0,9772 - (1 - 0,9998) = 0,977$.

b) $P(X > 105) = P\left(Z > \frac{105-75}{4}\right) = P(Z > 7,5) = 1 - P(Z < 7,5) = 1 - 1 = 0$.

Nota: $P(Z < 7,5) = 1$ porque, si ya en la tabla de la distribución normal estándar, $P(Z < 3,99) = 1$, con más razón todavía $P(Z < 7,5) = 1$.

7. En una población de 25000 individuos adultos, su perímetro torácico se distribuye normalmente con media de 90 cm y desviación típica de 4 cm.

a) ¿Cuántos individuos tienen un perímetro torácico inferior a 86,4 cm?

b) ¿Qué perímetro torácico ha de tener un individuo de esa población para que el 23% lo tenga inferior a él?

Solución

Llamemos X a la variable "longitud del perímetro torácico". Entonces $X \to N(90,4)$.

a) $P(X < 86,4) = P\left(Z < \frac{86,4-90}{4}\right) = P(Z < -0,9) = P(Z > 0,9) = 1 - P(Z < 0,9) = 1 - 0,8159 = 0,1841$.

Por tanto, los individuos que tienen un perímetro torácico inferior a 86,4 son $0,1841 \cdot 25000 = 4602,5$, o sea, aproximadamente 4600 individuos.

b) Llamemos x al perímetro torácico que ha de tener un individuo de esa población para que el 23% lo tenga inferior a él. Simbólicamente, $P(X < x) = 0,23$. Puesto que $0,23 < 0,5$, debe ser $x < 90$, de donde $\frac{x-90}{4} < 0 \Rightarrow \frac{90-x}{4} > 0$. Esto lo tendremos en cuenta a la hora de tipificar y de aplicar las fórmulas correspondientes. Entonces:

$P(X < x) = 0,23 \Rightarrow P\left(Z < \frac{x-90}{4}\right) = 0,23 \Rightarrow P\left(Z > \frac{90-x}{4}\right) = 0,23 \Rightarrow 1 - P\left(Z < \frac{90-x}{4}\right) = 0,23 \Rightarrow$

$\Rightarrow P\left(Z < \frac{90-x}{4}\right) = 1 - 0,23 \Rightarrow P\left(Z < \frac{90-x}{4}\right) = 0,77$.

Mirando ahora en la tabla de la distribución normal estándar, tenemos que

$\frac{90-x}{4} = 0,74 \Rightarrow 90 - x = 2,96 \Rightarrow x = 90 - 2,96 = 87,04$.

Esto indica que el perímetro torácico que ha de tener un individuo de esa población para que el 23% lo tenga inferior a él, es de 87,04 cm.

8. El diámetro medio de las piezas producidas en una fábrica es de 45 mm.

   a) Determina su desviación típica sabiendo que la probabilidad de que una pieza tenga su diámetro mayor de 50 mm es igual a 0,0062.

   b) Si se analizaron 820 piezas, ¿cuántas tendrán el diámetro comprendido entre 39,7 y 43,5 mm?

Solución

Sea X la variable "diámetro de una pieza". Entonces $X \to N(45, \sigma)$.

a) $P(X > 50) = 0,0062 \Rightarrow P\left(Z > \frac{50-45}{\sigma}\right) = 0,0062 \Rightarrow P\left(Z > \frac{5}{\sigma}\right) = 0,0062 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 - P\left(Z < \frac{5}{\sigma}\right) = 0,0062 \Rightarrow P\left(Z < \frac{5}{\sigma}\right) = 1 - 0,0062 \Rightarrow P\left(Z < \frac{5}{\sigma}\right) = 0,9938$.

Mirando en la tabla de la distribución normal estándar, tenemos que $\frac{5}{\sigma} = 2,5 \Rightarrow \sigma = \frac{5}{2,5} = 2$.

b) $P(39,7 < X < 43,5) = P\left(\frac{39,7-45}{2} < Z < \frac{43,5-45}{2}\right) = P(-2,65 < Z < -0,75) =$

$= P(Z < -0,75) - P(Z < -2,65) = P(Z > 0,75) - P(Z > 2,65) =$

$= [1 - P(Z < 0,75)] - [1 - P(Z < 2,65)] = (1 - 0,7580) - (1 - 0,9960) = 0,215 - 0,004 = 0,211$.

9. Se sabe que la vacuna antitetánica produce fiebre como efecto secundario en el 0,1% de los casos. Calcula la probabilidad de que en un conjunto de 3000 personas vacunadas se produzca fiebre en, al menos, 4 casos.

Solución

Llamemos éxito a "que la vacuna antitetánica produzca fiebre como efecto secundario". La variable X, número de éxitos, o "número de personas en las que la vacuna antitetánica produzca fiebre como efecto secundario", se distribuye según una binomial con $n = 3000$ y $p = 0,1\% = \frac{0,1}{100} = 0,001$.

Puesto que $np = 3000 \cdot 0,001 = 3 < 5$ y $nq = 3000 \cdot 0,9 = 2700 > 5$, realmente no se cumplen las condiciones para poder aproximar la binomial por una normal. De todas formas, vamos a responder a la pregunta usando la binomial y la aproximación por la normal para que se ve la diferencia.

Usando la binomial, que se produzca fiebre en, al menos, 4 casos, es justo lo contrario de que se produzca fiebre en menor de 4 casos. Por tanto:

$$P(X \geq 4) = 1 - P(X < 4) = 1 - [P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)] =$$

$$= 1 - \left[\binom{3000}{0} \cdot 0,001^0 \cdot 0,999^{3000} + \binom{3000}{1} \cdot 0,001^1 \cdot 0,999^{2999} + \right.$$

$$\left. = + \binom{3000}{2} \cdot 0,001^2 \cdot 0,999^{2998} + \binom{3000}{3} \cdot 0,001^3 \cdot 0,999^{2997} \right] =$$

$$= 1 - (0,0497 + 0,1493 + 0,2241 + 0,2242) = 1 - 0,6473 = 0,3527.$$

Veamos que ocurriría si aproximáramos la variable X por una normal de media $\mu = np = 3$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{3000 \cdot 0,001 \cdot 0,999} = 1,73$. Es decir:

$$X \to B(3000\ ;\ 0,001) \Rightarrow X \to N(3\ ;\ 1,73)$$

Por tanto: $P(X \geq 4) = P\left(Z \geq \dfrac{4-3}{1,73}\right) = P(Z \geq 0,58) = 1 - P(Z \leq 0,58) = 1 - 0,7190 = 0,281$.

Observación:

Se da por correcta la anterior solución cuando se aproxima una binomial por una normal. Sin embargo, es importante hacer notar que, la forma realmente rigurosa de hacer la parte final de este problema es la que se explica a continuación.

Cuando se aproxima una binomial por una normal, se suele usar la ***corrección por continuidad*** para que los resultados sean más fiables o, si se quiere, "más exactos". Puesto que la distribución normal es continua, la probabilidad de ser igual a un número concreto, $P(X = x)$, es igual a cero. Por eso ocurre que, en la distribución normal, las probabilidades no varían si la desigualdad es o no es estricta. En nuestro caso tendríamos que $P(X > 4) = P(X \geq 4)$. Como nosotros sí que queremos que se incluya el valor $x = 4$ (pues se pide que se produzca fiebre en, al menos, 4 casos), se hace una "pequeña corrección" y se resta $0,5$. O sea:

$$P(X \geq 4) = P(X \geq 4 - 0,5) = P(X \geq 3,5) = P\left(Z \geq \frac{3,5-3}{1,73}\right) = P(Z \geq 0,29) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 0,29) = 1 - 0,6141 = 0,3859.$$

Obsérvese que este valor es bastante diferente que el obtenido anteriormente, que era $0,281$. Además, también es mucho más próximo al obtenido con la binomial, que era $0,3527$.

Para saber más, y hacerlo todo bien, se recomienda leer la sección *10.5 Corrección por continuidad*, de los apuntes de distribución binomial y normal.

10. Se ha realizado una encuesta sobre una población de escasa cultura, de la que solo un 15% ha leído más de tres libros. Elegida al azar una muestra de 60 personas, calcula la probabilidad de que haya más de cinco personas que han leído más de tres libros.

Solución

Llamemos éxito a "que una persona haya leído más de tres libros". La variable X, número de éxitos, o "número de personas que leen más de tres libros", se distribuye según una binomial con $n = 60$ y $p = 0,15$.

Puesto que $np = 60 \cdot 0,15 = 9 > 5$ y $nq = 60 \cdot 0,85 = 51 > 5$, podemos aproximar la variable X por una normal de media $\mu = np = 9$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{60 \cdot 0,15 \cdot 0,85} = 2,77$. Es decir:

$$X \to B(60\ ;\ 0,15) \Rightarrow X \to N(9\ ;\ 2,77)$$

Por tanto: $P(X > 5) = P\left(Z > \dfrac{5-9}{2,77}\right) = P(Z > -1,44) = P(Z < 1,44) = 0,9251$.

Observación:

Se da por correcta la anterior solución. Sin embargo, es importante hacer notar que, la forma realmente rigurosa de hacer la parte final de este problema es la que se explica a continuación.

Cuando se aproxima una binomial por una normal, se suele usar la ***corrección por continuidad*** para que los resultados sean más fiables o, si se quiere, "más exactos". Puesto que la distribución normal es continua, la probabilidad de ser igual a un número concreto, $P\left(X=x\right)$, es igual a cero. Por eso ocurre que, en la distribución normal, las probabilidades no varían si la desigualdad es o no es estricta. En nuestro caso tendríamos que $P\left(X>5\right)=P\left(X\geq 5\right)$. Como nosotros no queremos que se incluya el valor $x=5$ (pues se pide que haya más de cinco personas que han leído más de tres libros), se hace una "pequeña corrección" y se suma $0,5$. O sea:

$$P\left(X>5\right)=P\left(X\geq 5+0,5\right)=P\left(X\geq 5,5\right)=P\left(Z>\frac{5,5-9}{2,77}\right)=P\left(Z>-1,26\right)=P\left(Z<1,26\right)=0,8962\,.$$

Obsérvese que se nota una "diferencia apreciable" entre la probabilidad hallada anteriormente y esta última.

Para saber más, y hacerlo todo bien, se recomienda leer la sección *10.5 Corrección por continuidad*, de los apuntes de distribución binomial y normal.