Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I

Ejercicios de Binomial y Normal

1. En un grupo de 16 personas, 10 son varones y 6 mujeres. Se eligen al azar 3 personas del grupo. Calcula la probabilidad de:

   a) Seleccionar exactamente dos varones.

   b) Seleccionar al menos un varón.

   Solución

   Llamemos éxito a "ser varón". Entonces, la variable número de éxitos, o lo que es lo mismo, el número de varones, se distribuye según una binomial con $n=3$ y $p=\frac{10}{16}=\frac{5}{8}$.

   a) $P(X=2)=\binom{3}{2}\cdot\left(\frac{5}{8}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{8}\right)^1=\frac{3\cdot 25\cdot 3}{8^3}=\frac{225}{512}=0,439$.

   b) Seleccionar al menos un varón es lo contrario de no seleccionar ninguno:

   $$P(X\geq 1)=1-P(X<1)=1-P(X=0)=1-\binom{3}{0}\cdot\left(\frac{5}{8}\right)^0\cdot\left(\frac{3}{8}\right)^3=1-\frac{27}{512}=\frac{485}{512}=0,9473.$$

2. En un proceso de fabricación, la probabilidad de que una unidad producida pase el control de calidad es del 90%. En un lote de 8 unidades, ¿cuál es la probabilidad de que todas pasen el control de calidad? ¿Y de que lo pasen al menos 6?

   Solución

   Llamemos éxito a "pasar la fase de control de calidad". Entonces, el número de éxitos, o número de unidades que pasan el control de calidad, sigue una distribución binomial con $n=8$ y $p=0,9$.

   La probabilidad de que todas pasen el control de calidad es $P(X=8)=\binom{8}{8}\cdot 0,9^8\cdot 0,1^0=0,9^8=0,4305$.

   Y la probabilidad de que pasen el control de calidad al menos 6 de las unidades es:

   $$P(X=6)+P(X=7)+P(X=8)=\binom{8}{6}\cdot 0,9^6\cdot 0,1^2+\binom{8}{7}\cdot 0,9^7\cdot 0,1^1+\binom{8}{8}\cdot 0,9^8\cdot 0,1^0=$$

   $$=0,1488+0,3826+0,4305=0,9619.$$

3. Vicente hace la compra habitualmente los sábados en un supermercado con buenos precios, pero no muy bien organizado, ya que solo el 90% de los artículos están marcados. Si el sábado Vicente compró 10 artículos, ¿cuál es la probabilidad de que alguno de ellos no estuviera marcado? ¿Y de que solo cuatro estuvieran marcados?

   Solución

   Llamemos éxito a "un artículo está marcado". La variable número de éxitos, o lo que es lo mismo, número de artículos marcados, sigue una distribución binomial con $n=10$ y $p=0,9$.

   Que alguno de los artículos no esté marcado es lo contrario de que estén todos marcados. Por tanto:

$$P(\text{alguno no marcado}) = 1 - P(X = 10) = 1 - \binom{10}{10} \cdot 0,9^{10} \cdot 0,1^{0} = 1 - 03487 = 0,6513 .$$

La probabilidad de que sólo cuatro estuvieran marcados es: $P(X = 4) = \binom{10}{4} \cdot 0,9^{4} \cdot 0,1^{6} = 0,000138$.

4. Se lanza una moneda cuatro veces. Calcula la probabilidad de que salgan más caras que cruces en los siguientes casos:

a) La moneda está equilibrada, es decir, la probabilidad de salir cara es la misma que la de salir cruz.

b) La moneda está cargada, siendo la probabilidad de salir cara $p = 0,3$.

Solución

a) En este caso se trata de una distribución binomial con $n = 4$ y $p = \frac{1}{2} = 0,5$, donde p es la probabilidad de éxito o la de salir cara. Para que salgan más caras que cruces tienen que salir tres o cuatro caras, es decir:

$$P(X = 3) + P(X = 4) = \binom{4}{3} \cdot 0,5^{3} \cdot 0,5^{1} + \binom{4}{4} \cdot 0,5^{4} \cdot 0,5^{0} = 4 \cdot 0,5^{4} + 0,5^{4} = 5 \cdot 0,5^{4} = 0,3125 .$$

b) En este caso la probabilidad de éxito cambia, y es $p = 0,3$. Por tanto:

$$P(X = 3) + P(X = 4) = \binom{4}{3} \cdot 0,3^{3} \cdot 0,7^{1} + \binom{4}{4} \cdot 0,3^{4} \cdot 0,7^{0} = 4 \cdot 0,3^{3} \cdot 0,7 + 0,3^{4} =$$
$$= 0,0756 + 0,0081 = 0,0837 .$$

Obsérvese que ha disminuido bastante la probabilidad de obtener más caras que cruces.

5. Si se contesta al azar un test de 8 preguntas con respuestas Sí/No, ¿cuál es la probabilidad de acertar más de 5? ¿Y la de acertar 3 o 4?

Solución

Si llamamos éxito a "acertar una pregunta", la variable "número de éxitos o de preguntas acertadas", se distribuye según una binomial con $p = \frac{1}{2} = 0,5$ y $n = 8$.

- Probabilidad de acertar más de 5 preguntas:

$$P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) = \binom{8}{6} \cdot 0,5^{6} \cdot 0,5^{2} + \binom{8}{7} \cdot 0,5^{7} \cdot 0,5^{1} + \binom{8}{8} \cdot 0,5^{8} \cdot 0,5^{0} =$$
$$= 28 \cdot 0,5^{8} + 8 \cdot 0,5^{8} + 1 \cdot 0,5^{8} = 37 \cdot 0,5^{8} = 0,1445 .$$

- Probabilidad de acertar 3 o 4 preguntas:

$$P(X = 3) + P(X = 4) = \binom{8}{3} \cdot 0,5^{3} \cdot 0,5^{5} + \binom{8}{4} \cdot 0,5^{4} \cdot 0,5^{4} = 56 \cdot 0,5^{8} + 70 \cdot 0,5^{8} = 126 \cdot 0,5^{8} = 0,4922 .$$

6. El tiempo empleado por los estudiantes con relación a cierta prueba se distribuye normalmente con media de 30 minutos y desviación típica de 5.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante, elegido al azar, tarde menos de 28 minutos en finalizar la prueba?

b) ¿Qué tiempo emplea como máximo el 80% de los estudiantes?

Solución

Llamemos X a la variable "tiempo empleado en realizar la prueba". Entonces $X \to N(30,5)$.

a) $P(X<28)=P\left(Z<\frac{28-30}{5}\right)=P(Z<-0,4)=P(Z>0,4)=1-P(Z<0,4)=1-0,6554=0,3446$.

b) Llamemos x al tiempo que emplea como máximo el 80% de los estudiantes. Simbólicamente, esto se puede escribir así: $P(X<x)=0,8$. Obsérvese que, en este caso, $x>30$, ya que la probabilidad por encima de la media es $0,5$ (por encima y por debajo de la media están, naturalmente, el 50 % de los estudiantes). Esto indica que $\frac{x-30}{5}>0$, cosa que hemos de tener en cuenta a la hora de tipificar y de aplicar, en su caso, las fórmulas correspondientes. Veamos: $P(X<x)=0,8 \Rightarrow P\left(Z<\frac{x-30}{5}\right)=0,8$. Mirando ahora en la tabla de la distribución normal estándar, tenemos que: $\frac{x-30}{5}=0,84 \Rightarrow x=0,84\cdot 5+30 \Rightarrow x=34,2$.

   O sea, que el 80 % de los estudiantes emplean un tiempo máximo de 34,2 minutos.

7. Una normativa europea no permite que en los envases de yogur haya menos de 120 gramos. La máquina dosificadora de una empresa láctea hace los envases de yogur según una ley normal de desviación estándar de 2 gramos y media de 122 gramos.

   a) ¿Qué tanto por ciento de los envases de yogur de esta empresa cumplirá la normativa?

   b) ¿Cuál deberá ser la media μ de la ley normal con la cual la máquina dosificadora hace los envases para que el 98 % de la producción de yogures de esta empresa cumpla la normativa?

Solución

Si llamamos X a la variable "gramos que contienen un envase de yogur". Entonces $X \to N(122,2)$.

a) Para que se cumpla la normativa debe de haber 120 gramos yogur, o más, en el envase, es decir:

   $P(X\geq 120)=P\left(Z\geq \frac{120-122}{2}\right)=P(Z\geq -1)=P(Z\leq 1)=0,8413$. Esto indica que el 84,13 % de los envases de yogur de esta empresa cumple con la normativa.

b) Lo que se pide es calcular la media con la que la máquina dosificadora debe hacer los envases para que se cumpla la normativa, es decir, para que $P(X\geq 120)=0,98$. Obsérvese que, como $0,98>0,5$, ha de ser $120<\mu$ (recuérdese que la curva normal media deja por encima un área igual a $0,5$). Entonces se tiene que $\frac{120-\mu}{2}<0 \Rightarrow \frac{\mu-120}{2}>0$. Todo esto se ha de tener en cuenta a la hora de tipificar y de aplicar la fórmula correspondiente en los cálculos. Veamos:

   $$P(X\geq 120)=0,98 \Rightarrow P\left(Z\geq \frac{120-\mu}{2}\right)=0,98 \Rightarrow P\left(Z\leq \frac{\mu-120}{2}\right)=0,98.$$

   Mirando en la tabla de la distribución normal estándar se tiene que:

   $$\frac{\mu-120}{2}=2,06 \Rightarrow \mu=2\cdot 2,06+120 \Rightarrow \mu=124,12.$$

   Esto quiere decir que la empresa debe adecuar la máquina dosificadora para que la media por envase sea de 124,12 gramos, si quiere que el 98 % de sus yogures cumplan con la normativa.

8. El tiempo que necesita una ambulancia para llegar a un centro médico se distribuye según una variable normal con una media de 17 min y una desviación típica de 3 min.

a) Determina la probabilidad de que el tiempo que tarde en llegar esté comprendido entre 13 min y 21 min.

b) ¿Cuál es el valor x de la variable para el cual el 5 % de las ambulancias tardan más de x min en llegar?

Solución

Llamemos X a la variable "tiempo que necesita la ambulancia para llegar al centro médico". Entonces $X \to N(17,3)$.

a) $P(13 < X < 21) = P\left(\frac{13-17}{3} < Z < \frac{21-17}{3}\right) = P(-1,33 < Z < 1,33) = P(Z < 1,33) - P(Z < -1,33) =$

$= P(Z < 1,33) - P(Z > 1,33) = P(Z < 1,33) - \left[1 - P(Z < 1,33)\right] = 2 \cdot P(Z < 1,33) - 1 =$

$= 2 \cdot 0,9082 - 1 = 1,8164 - 1 = 0,8164$.

b) Simbólicamente, hemos de calcular x para que $P(X > x) = 0,05$. Evidentemente, el valor de x buscado es mayor que la media, ya que deja una probabilidad por encima menor que $0,5$ (que es justamente la probabilidad por encima de la media). Es decir: $x > 17$, con lo que $\frac{x-17}{3} > 0$. Esto es importante a la hora de tipificar y de aplicar las fórmulas correspondientes. Veamos:

$$P(X > x) = 0,05 \Rightarrow P\left(Z > \frac{x-17}{3}\right) = 0,05 \Rightarrow 1 - P\left(Z < \frac{x-17}{3}\right) = 0,05 \Rightarrow P\left(Z < \frac{x-17}{3}\right) = 0,95.$$

Mirando ahora en el interior de la tabla de la distribución normal estándar, tenemos que:

$$\frac{x-17}{3} = 1,645 \Rightarrow x = 1,645 \cdot 3 + 17 \Rightarrow x = 21,935.$$

Nota: hemos tomado como valor de $\frac{x-17}{3} = 1,645$ porque, en la tabla de la distribución normal estándar, se tiene que $P(Z < 1,64) = 0,9495$ y $P(Z < 1,65) = 0,9505$. Como $0,95$ es justo la mitad de $0,9495$ y $0,9505$, también hemos tomado para $\frac{x-17}{3}$ justamente la mitad de $1,64$ y $1,65$.

9. Después de realizar varios sondeos sobre cierta población, se ha conseguido averiguar que únicamente el 15% de la misma es favorable a los tratamientos de psicoterapia. Elegida al azar una muestra de 50 personas de dicha población, calcular la probabilidad de que haya más de 5 personas favorables a dichos tratamientos.

Solución

Llamemos éxito a "ser favorable a los tratamientos de psicoterapia". La variable X estar a favor de los tratamientos de psicoterapia se distribuye según una binomial con $n = 50$ y $p = 0,15$.

Puesto que $np = 50 \cdot 0,15 = 7,5 > 5$ y $nq = 50 \cdot 0,85 = 42,5 > 5$, podemos aproximar esta variable por una normal de media $\mu = np = 7,5$ y desviación $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{50 \cdot 0,15 \cdot 0,85} = 2,52$. Resumiendo:

$$X \to B(50\,;\,0,15) \Rightarrow X \to N(7,5\,;\,2,52)$$

Entonces, la probabilidad de que haya más de 5 personas favorables a dichos tratamientos es:

$$P(X > 5) = P\left(Z > \frac{5-7,5}{2,52}\right) = P(Z > -0,99) = P(Z < 0,99) = 0,8389.$$

Observación:

Se da por correcta la anterior solución. Sin embargo, es importante hacer notar que, la forma realmente rigurosa de hacer la parte final de este problema es la que se explica a continuación.

Cuando se aproxima una binomial por una normal, se suele usar la ***corrección por continuidad*** para que los resultados sean más fiables o, si se quiere, "más exactos". Puesto que la distribución normal es continua, la probabilidad de ser igual a un número concreto, $P(X=x)$, es igual a cero. Por eso ocurre que, en la distribución normal, las probabilidades no varían si la desigualdad es o no es estricta. En nuestro caso tendríamos que $P(X>5)=P(X\geq 5)$. Como nosotros no queremos que se incluya el valor $x=5$ (pues se pide que haya más de 5 personas favorables a los tratamientos), se hace una "pequeña corrección" y se suma $0,5$. O sea:

$$P(X>5)=P(X\geq 5+0,5)=P(X\geq 5,5)=P\left(Z\geq\frac{5,5-7,5}{2,52}\right)=P(Z\geq -0,79)=P(Z\leq 0,79)=0,7852\,.$$

Cuando se cumplen las condiciones de aproximación de la binomial por una normal y, además, n es "muy grande", esta corrección apenas se nota. Pero esto no ocurre así en los casos en que el valor de n es "pequeño". Por ejemplo, en este caso se nota una "diferencia apreciable" entre la probabilidad hallada anteriormente y esta última.

Para saber más, y hacerlo todo bien, se recomienda leer la sección ***10.5 Corrección por continuidad***, de los apuntes de distribución binomial y normal.

10. El 11 % de los billetes de la lotería reciben algún premio, aunque sea el reintegro. En una familia juega a 46 números. ¿Cuál es la probabilidad de obtener premio en, al menos, 10 de ellos?

Solución

Se da por correcta la anterior solución. Sin embargo, es importante hacer notar que, la forma realmente rigurosa de hacer la parte final de este problema es la que se explica a continuación.

Cuando se aproxima una binomial por una normal, se suele usar la ***corrección por continuidad*** para que los resultados sean más fiables o, si se quiere, "más exactos". Puesto que la distribución normal es continua, la probabilidad de ser igual a un número concreto, $P(X=x)$, es igual a cero. Por eso ocurre que, en la distribución normal, las probabilidades no varían si la desigualdad es o no es estricta. En nuestro caso tendríamos que $P(X>10)=P(X\geq 10)$. Como nosotros queremos que se incluya el valor $x=10$ (pues se pide que obtengan el premio, al menos, 10 de ellos), se hace una "pequeña corrección" y se resta $0,5$ (así nos aseguramos de que el valor $x=10$ se incluya). O sea:

$$P(X\geq 10)=P(X\geq 10-0,5)=P(X\geq 9,5)=P\left(Z\geq\frac{9,5-5,06}{4,5}\right)=P(Z\geq 0,99)=$$

$$=1-P(Z\leq 0,99)=1-0,8339=0,1661\,.$$

Cuando se cumplen las condiciones de aproximación de la binomial por una normal y, además, n es "muy grande", esta corrección apenas se nota. Pero esto no ocurre así en los casos en que el valor de n es "pequeño". Por ejemplo, en este caso se nota una "diferencia apreciable" entre la probabilidad hallada anteriormente y esta última.

Para saber más, y hacerlo todo bien, se recomienda leer la sección *10.5 Corrección por continuidad*, de los apuntes de distribución binomial y normal.