Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I

Ejercicios de Binomial y Normal

1. Una máquina que fabrica discos compactos consigue fabricar un 90 % de discos sin error. Si escogemos 10 de ellos al azar, calcula las siguientes probabilidades:

   a) No hay ninguno defectuoso.

   b) Hay más de uno defectuoso.

   Solución

   Llamemos éxito a "disco defectuoso". Como el 90 % de los discos no tienen error, la probabilidad de que un disco sea defectuoso es $p=0{,}1$. En este caso, la variable número de éxitos, o "número de discos defectuosos" se distribuye según una binomial con $n=10$ y $p=0{,}1$.

   a) $P(X=0)=\binom{10}{0}\cdot 0{,}1^0\cdot 0{,}9^{10}=0{,}9^{10}=0{,}3487$.

   b) Que haya más de uno defectuoso es lo contrario de que haya uno o ninguno defectuoso:

   $$P(X>1)=1-P(X\le 1)=1-\left[P(X=0)+P(X=1)\right]=1-\left[\binom{10}{0}\cdot 0{,}1^0\cdot 0{,}9^{10}+\binom{10}{1}\cdot 0{,}1^1\cdot 0{,}9^9\right]=$$

   $$=1-(0{,}3487+0{,}3874)=1-0{,}7361=0{,}2639.$$

2. Se reparten unas invitaciones sabiendo que el 40% asistirán al acto. Se seleccionan al azar 10 invitados. Calcula la probabilidad de que:

   a) Solo tres acudan al acto.

   b) Acudan más de tres.

   Solución

   Llamemos éxito a "asistir al acto" entonces $p=0{,}4$ y se trata de una binomial $B(10\,;\,0{,}4)$.

   a) $P(X=3)=\binom{10}{3}\cdot 0{,}4^3\cdot 0{,}6^7=120\cdot 0{,}064\cdot 0{,}028=0{,}21504$.

   b) Que acudan más de tres es lo contrario de que acudan tres o menos. Entonces:

   $$P(X>3)=1-P(X\le 3)=1-\left[P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)\right]=$$

   $$=1-\left[\binom{10}{0}\cdot 0{,}4^0\cdot 0{,}6^{10}+\binom{10}{1}\cdot 0{,}4^1\cdot 0{,}6^9+\binom{10}{2}\cdot 0{,}4^2\cdot 0{,}6^8+\binom{10}{3}\cdot 0{,}4^3\cdot 0{,}6^7\right]=$$

   $$=1-(0{,}006+0{,}0403+0{,}1209+0{,}21504)=1-0{,}38224=0{,}61776.$$

3. En un determinado juego se gana cuando al lanzar dos dados se obtiene suma de puntos igual a 10 o más. Un jugador tira en 12 ocasiones los dos dados. Calcula las siguientes probabilidades.

   a) Que gane exactamente en tres ocasiones.

   b) Que pierda las 12 veces que juega.

Solución

En el experimento consistente en lanzar dos dados, llamemos éxito a "obtener suma de puntos 10 o más". La probabilidad de éxito es $p=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$, porque de 36 casos posibles, solamente hay 6 favorables en los que la suma es 10 o más. Son los siguientes: $\{(4,6),(5,5),(5,6),(6,4),(6,5),(6,6)\}$. Entonces, el número de éxitos se distribuyen según una binomial con $n=12$ y $p=\frac{1}{6}$.

a) $P(X=3)=\binom{12}{3}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^9=220\cdot\frac{5^9}{6^{12}}=0{,}1674$.

b) Perder las doce veces que juega es lo mismo que ganar cero veces (no ganar ninguna vez). Entonces:

$$P(X=0)=\binom{12}{0}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^0\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{12}=\left(\frac{5}{6}\right)^{12}=0{,}1122.$$

4. Un jugador de tenis tiene una probabilidad de 0,4 de colocar su primer servicio. Si hace series de 10 servicios, calcula:

a) La probabilidad de que acierte más de cinco primeros servicios.

b) La probabilidad de que no acierte ningún primer servicio.

c) El número esperado de primeros servicios acertados.

Solución

Llamemos éxito a "colocar o acertar el primer servicio". La variable número de éxitos, o "número de primeros servicios acertados", se distribuye según una binomial con $n=10$ y $p=0,4$.

a) $P(X>5)=P(X=6)+P(X=7)+P(X=8)+P(X=9)+P(X=10)=$

$$=\binom{10}{6}\cdot 0,4^6\cdot 0,6^4+\binom{10}{7}\cdot 0,4^7\cdot 0,6^3+\binom{10}{8}\cdot 0,4^8\cdot 0,6^2+\binom{10}{9}\cdot 0,4^9\cdot 0,6^1+\binom{10}{10}\cdot 0,4^{10}\cdot 0,6^0=$$

$$=0{,}1115+0,0425+0,0106+0,0016+0,0001=0{,}1663.$$

b) $P(X=0)=\binom{10}{0}\cdot 0,4^0\cdot 0,6^{10}=0,6^{10}=0,006$.

c) El número esperado de primeros servicios acertados es la media de la distribución, es decir:

$$\bar{x}=np=10\cdot 0,4=4.$$

5. Un vendedor de seguros vende pólizas a 5 personas de la misma edad y con buena salud. Según las tablas actuariales, la probabilidad de que una persona en esas condiciones viva 30 años o más es de 2/3. Calcula la probabilidad de que al cabo de 30 años vivan:

a) Las cinco personas.

b) Al menos tres.

Solución

Si llamamos éxito a "que una persona viva 30 años o más", la variable número de éxitos se distribuye según una binomial con $p=\frac{2}{3}$ y $n=5$.

a) $P(X=5)=\binom{5}{5}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^5\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^0=\left(\frac{2}{3}\right)^5=\frac{2^5}{3^5}=\frac{32}{243}=0{,}1317$.

b) $P(X\geq 3)=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)=\binom{5}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2+\binom{5}{4}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^1+\binom{5}{5}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^5\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^0=$

$=10\cdot\frac{2^3}{3^5}+5\cdot\frac{2^4}{3^5}+1\cdot\frac{2^5}{3^5}=\frac{80+80+32}{243}=\frac{192}{243}=0{,}79$.

6. Una distribución normal tiene de media 50 y se sabe que el 7% de los casos están por encima de 70.

a) Calcula su desviación típica.

b) ¿Cuál será la probabilidad de los casos que están por debajo de 45?

Solución

Tenemos que $X\to N(50,\sigma)$. Además, según el enunciado, $P(x>70)=0{,}07$.

a) $P(x>70)=0{,}07\Rightarrow P\left(Z>\frac{70-50}{\sigma}\right)=0{,}07\Rightarrow P\left(Z>\frac{20}{\sigma}\right)=0{,}07\Rightarrow$

$\Rightarrow 1-P\left(Z<\frac{20}{\sigma}\right)=0{,}07\Rightarrow P\left(Z<\frac{20}{\sigma}\right)=0{,}93$.

Mirando en la tabla de la distribución normal estándar, tenemos que $\frac{20}{\sigma}=1{,}48\Rightarrow\sigma=\frac{20}{1{,}48}=13{,}51$.

b) $P(X<45)=P\left(Z<\frac{45-50}{13{,}51}\right)=P(Z<-0{,}37)=P(Z>0{,}37)=1-P(Z<0{,}37)=1-0{,}6443=0{,}3557$.

7. Las puntuaciones de un grupo de 500 alumnos en una prueba de razonamiento numérico se distribuyen normalmente con una media de 5 y una desviación típica de 2.

a) ¿Qué porcentaje de alumnos obtiene una nota inferior a 9? ¿Cuántos alumnos son?

b) ¿Cuántos alumnos tienen una puntuación mayor de 3?

Solución

Sea X la variable "puntuación en la prueba de razonamiento numérico". Entonces $X\to N(5,2)$.

a) $P(X<9)=P\left(Z<\frac{9-5}{2}\right)=P(Z<2)=0{,}9772$. Por tanto, el porcentaje de alumnos obtiene una nota inferior a 9, es del 97,72 %. Como en total son 500 alumnos, esto supone que obtendrán una nota inferior a 9, $\frac{500\cdot 97{,}72}{100}=488{,}6$. O sea, 489 alumnos, aproximadamente.

b) $P(X>3)=P\left(Z>\frac{3-5}{2}\right)=P(Z>-1)=P(Z<1)=0{,}8413$. Entonces, obtienen una puntuación mayor que 3, $0{,}8413\cdot 500=420{,}65$ alumnos. Redondeando, uno 421 alumnos.

8. En una población de primates se ha estudiado la capacidad craneal de los mismos, obteniéndose una distribución normal con una media de 1200 cm^3 y una desviación típica de 140 cm^3.

a) Calcula la probabilidad de que, si escogemos al azar un primate de los estudiados, tenga una capacidad craneal superior a los 1400 cm^3.

b) ¿Cuál es el valor de x para el cual el 20 % de los primates tiene una capacidad craneal menor que x ?

Solución

Llamemos X a la variable "capacidad craneal de los primates de esa población". Entonces $X \to N(1200,140)$.

a) $P(X > 1400) = P\left(Z > \dfrac{1400-1200}{140}\right) = P(Z > 1,43) = 1 - P(Z < 1,43) = 1 - 0,9236 = 0,0764$.

b) Obsérvese que se piden un valor de x cumpliendo que $P(X < x) = 0,20$. Entonces, este valor de x debe ser menor que la media, pues la probabilidad de estar por debajo de él es menor de 0,5 (y la media divide la curva normal en dos partes simétricas, cada una con probabilidad 0,5). Es decir, $x < 1200 \Rightarrow \dfrac{x-1200}{140} < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{1200-x}{140} > 0$. Todo esto hay que tenerlo en cuenta a la hora de aplicar las fórmulas, una vez que tipifiquemos la variable. Vamos allá:

$$P(X < x) = 0,20 \Rightarrow P\left(Z < \frac{x-1200}{140}\right) = 0,20 \Rightarrow P\left(Z > \frac{1200-x}{140}\right) = 0,20 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - P\left(Z < \frac{1200-x}{140}\right) = 0,20 \Rightarrow P\left(Z < \frac{1200-x}{140}\right) = 0,80.$$

Mirando ahora en la tabla de la normal estándar: $\dfrac{1200-x}{140} = 0,84 \Rightarrow 1200 - x = 117,6 \Rightarrow x = 1082,4$ cm³.

9. En un examen tipo test de 200 preguntas de elección múltiple, cada pregunta tiene una respuesta correcta y una incorrecta. Se aprueba si se contestan más de 110 respuestas correctas. Suponiendo que se contesta al azar, calcula la probabilidad de aprobar el examen.

Solución

Llamemos éxito a "contestar correctamente una pregunta". Claramente, la variable X número de éxitos o "número de preguntas correctamente acertadas", sigue una distribución binomial con $n = 200$ y $p = \dfrac{1}{2} = 0,5$. Puesto que $np = 200 \cdot 0,5 = 100 > 5$ y $nq = 200 \cdot 0,5 = 100 > 5$, esta distribución binomial se puede aproximar por una distribución normal de media $\mu = np = 100$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{200 \cdot 0,5 \cdot 0,5} = 7,07$. O sea: $X \to B(200\ ;\ 0,5) \Rightarrow X \to N(100\ ;\ 7,07)$.

Entonces, como para aprobar el examen hay que contestar a más de 110 respuestas correctas, si se contesta al azar, la probabilidad de aprobar el examen es:

$$P(X > 110) = P\left(Z > \frac{110-100}{7,07}\right) = P(Z > 1,41) = 1 - P(Z < 1,41) = 1 - 0,9207 = 0,0793.$$

Podemos concluir que, aun habiendo solamente dos alternativas para responder a cada pregunta, si contestamos al azar solamente aprobaríamos en, aproximadamente, el 8 % de las ocasiones.

Observación:

Se da por correcta la anterior solución. Sin embargo, es importante hacer notar que, la forma realmente rigurosa de hacer la parte final de este problema es la que se explica a continuación.

Cuando se aproxima una binomial por una normal, se suele usar la ***corrección por continuidad*** para que los resultados sean más fiables o, si se quiere, "más exactos". Puesto que la distribución normal es continua, la probabilidad de ser igual a un número concreto, $P(X = x)$, es igual a cero. Por eso ocurre que, en la distribución normal, las probabilidades no varían si la desigualdad es o no es estricta. En nuestro caso tendríamos que $P(X>110)=P(X\geq 110)$. Como nosotros no queremos que se incluya el valor $x=110$ (pues se pide contestar a más de 110 respuestas correctas), se hace una "pequeña corrección" y se suma $0,5$. O sea:

$$P(X>110)=P(X\geq 110,5)=P\left(Z\geq\frac{110,5-100}{7,07}\right)=P(Z\geq 1,49)=1-P(Z\leq 1,49)=1-0,9319=0,0681.$$

Cuando se cumplen las condiciones de aproximación de la binomial por una normal y, además, n es "muy grande", esta corrección apenas se nota. Pero esto no ocurre así en los casos en que el valor de n es "pequeño".

Para saber más, y hacerlo todo bien, se recomienda leer la sección *10.5 Corrección por continuidad*, de los apuntes de distribución binomial y normal.

10. Un centro de enseñanza va a presentar, este curso, 240 alumnos a las pruebas de selectividad y se sabe que suelen aprobar el 95 % de los presentados. Calcula cuál es la probabilidad de que aprueben:

a) Más de 200.

b) Menos de 230.

Solución

Llamemos éxito a "aprobar la prueba de selectividad". La variable X "número de éxitos" o "número de alumnos que aprueban las pruebas de selectividad" se distribuye según una binomial con $n=240$ y $p=0,95$. Puesto que $np=240\cdot 0,95=228>5$ y $nq=240\cdot 0,05=12>5$, podemos aproximar la variable X por una normal con media $\mu=np=228$ y desviación típica $\sigma=\sqrt{npq}=\sqrt{240\cdot 0,95\cdot 0,05}=3,38$. Es decir:

$$X\rightarrow B(240\ ;\ 0,95)\Rightarrow X\rightarrow N(228\ ;\ 3,38)$$

a) $P(X>200)=P\left(Z>\dfrac{228-200}{3,38}\right)=P(Z<8,28)=1$.

La razón por la que $P(Z<8,28)=1$, es que, si miramos en tabla de la distribución normal estándar, se tiene que $P(Z<3,99)=1$. Por tanto, con más razón $P(Z<8,28)=1$. Esto quiere decir que siempre aprobarán la selectividad más de 200 alumnos de los 240 alumnos presentados.

b) $P(X<230)=P\left(Z<\dfrac{230-228}{3,38}\right)=P(Z<0,59)=0,7224$.

<u>Observación</u>:

Se da por correcta la anterior solución. Sin embargo, es importante hacer notar que, la forma realmente rigurosa de hacer la parte final de este problema es la que se explica a continuación.

Cuando se aproxima una binomial por una normal, se suele usar la ***corrección por continuidad*** para que los resultados sean más fiables o, si se quiere, "más exactos". Puesto que la distribución normal es continua, la probabilidad de ser igual a un número concreto, $P(X=x)$, es igual a cero. Por eso ocurre que, en la distribución normal, las probabilidades no varían si la desigualdad es o no es estricta. En nuestro caso, en el apartado a), tendríamos que $P(X>200)=P(X\geq 200)$. Como nosotros no queremos que se incluya el valor $x=200$ (pues se pide que aprueben más de 200), se hace una "pequeña corrección" y se suma $0,5$. O sea:

$$P(X>200)=P(X\geq 200+0,5)=P(X\geq 200,5)=P\left(Z>\frac{228-200,5}{3,38}\right)=P(Z<8,14)=1.$$

Observamos que no hay diferencia apreciable con el apartado a) anterior.

En el apartado b) tendríamos que $P(X<230)=P(X\leq 230)$. Como nosotros no queremos que se incluya el valor $x=230$ (pues se pide que aprueben menos de 230), se hace una "pequeña corrección" y se reta $0,5$. O sea:

$$P(X<230)=P(X\leq 230-0,5)=P(X\leq 229,5)=P\left(Z<\frac{229,5-228}{3,38}\right)=P(Z<0,44)=0,67\ .$$

Cuando se cumplen las condiciones de aproximación de la binomial por una normal y, además, n es "muy grande", esta corrección apenas se nota. Pero esto no ocurre así en los casos en que el valor de n es "pequeño". Por ejemplo, en este caso se nota una "diferencia apreciable" entre la probabilidad hallada anteriormente y esta última.

Para saber más, y hacerlo todo bien, se recomienda leer la sección *10.5 Corrección por continuidad*, de los apuntes de distribución binomial y normal.