

1. Halla la tasa de variación media de estas funciones en el intervalo $[1, 3]$ e indica si dichas funciones crecen o decrecen en ese intervalo.

a) $f(x) = \frac{1}{x}$; b) $f(x) = (2-x)^3$; c) $f(x) = x^2 - x + 1$; d) $f(x) = 2^x$

2. Dada la función $f(x) = x^2 - 1$, halla la tasa de variación media en el intervalo $[2, 2+h]$.

3. Comprueba que la TVM de la función $f(x) = -x^2 + 5x - 3$ en el intervalo $[1, 1+h]$ es igual a $-h+3$.
Calcula la TVM de esa función en los intervalos $[1, 2]$, $[1, 1,5]$, utilizando la expresión anterior.

4. Compara la TVM de las funciones $f(x) = x^3$ y $g(x) = 3^x$ en los intervalos $[2, 3]$ y $[3, 4]$, y di cuál de las dos crece más en cada intervalo.

5. Aplicando la definición de derivada, calcula $f'(-2)$ y $f'(3)$, siendo $f(x) = \frac{2x-3}{5}$.

6. Halla la derivada de las siguientes funciones en $x=1$, utilizando la definición de derivada:

a) $f(x) = 3x^2 - 1$; b) $f(x) = (2x+1)^2$; c) $f(x) = \frac{3}{x}$; d) $f(x) = \frac{1}{x+2}$

7. Halla el valor del crecimiento de $f(x) = (x-3)^2$ en los puntos $x=1$ y $x=3$, aplicando la definición de derivada.

8. Halla la pendiente de la recta tangente a la curva $y = x^2 - 5x + 1$ en el punto de abscisa $x = -2$, utilizando la definición de derivada.

9. Halla la pendiente de la recta tangente a la curva $y = 4x - x^2$ en el punto de abscisa $x = -2$, aplicando la definición de derivada.

10. Comprueba, utilizando la definición de derivada en cada caso.

a) $f(x) = 5x \Rightarrow f'(x) = 5$; b) $f(x) = 7x^2 \Rightarrow f'(x) = 14x$; c) $f(x) = x^2 + x \Rightarrow f'(x) = 2x + 1$;

d) $f(x) = \frac{3}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{-3}{x^2}$

11. Halla la función derivada de estas funciones y calcula su valor en los puntos que se indican.

a) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 6$, $x=1$; b) $f(x) = \cos(2x + \pi)$, $x=0$; c) $f(x) = \frac{x}{3} + \sqrt{2}$, $x = -\frac{17}{3}$;

d) $f(x) = \frac{1}{7x+1}$, $x=0$; e) $f(x) = \operatorname{sen} \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}$, $x = \pi$; f) $f(x) = \frac{2}{(x+3)^3}$, $x = -1$;

g) $f(x) = \frac{x^3}{2} + \frac{3}{2}x^2 - \frac{x}{2}$, $x=2$; h) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-4}}$, $x=8$; i) $f(x) = x \operatorname{sen}(\pi - x)$, $x = \frac{\pi}{2}$;

j) $f(x) = (5x-2)^3$, $x = \frac{1}{5}$; k) $f(x) = \frac{x+5}{x-5}$, $x=3$

12. Halla la función derivada de las siguientes funciones y simplifica, en la medida de lo posible, el resultado.

a) $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$; b) $f(x) = (x^2 - 3)^3$; c) $f(x) = \frac{x^3 - x^2}{x^2}$; d) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$; e) $f(x) = \sqrt[3]{(x+6)^2}$;

f) $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x}$; g) $f(x) = \frac{-3}{\sqrt{1-x^2}}$; h) $f(x) = 7^{x+1} \cdot e^{-x}$; i) $f(x) = \frac{1}{3x} + \frac{x}{3}$; j) $f(x) = \ln 3x + e^{\sqrt{x}}$;

k) $f(x) = \left(\frac{x}{1+x^2}\right)^2$; l) $f(x) = e^{2x} \cdot \operatorname{tg} x$; m) $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$; n) $f(x) = \cos^2 x + e^{\operatorname{sen} x}$;
ñ) $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x^2-4}}$; o) $f(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^3 \cdot e^{1-x}$; p) $f(x) = \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2}$; q) $f(x) = \log \frac{x^2}{3-x}$; r) $f(x) = \operatorname{tg}^3 x^2$;
s) $f(x) = \sqrt{\ln x}$; t) $f(x) = \operatorname{arcsen} \frac{x^2}{3}$; u) $f(x) = \operatorname{arctg}(x^2+1)$; v) $f(x) = \operatorname{arccos} \frac{1}{x}$; w) $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x}}{2}$;
x) $f(x) = \sqrt{\operatorname{arctg} x}$; y) $f(x) = \operatorname{arccos} e^{-x}$; z) $f(x) = \sqrt{x+\sqrt{x}}$; α) $f(x) = \operatorname{arctg} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)$

13. Halla los puntos en los que la derivada es igual a 0 en las siguientes funciones:

a) $y = 3x^2 - 2x + 1$; b) $y = x^3 - 3x$

14. Obtén los puntos donde $f'(x) = 1$ en los siguientes casos:

a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$; b) $f(x) = \frac{x+1}{x+5}$

15. Halla los puntos en los que la derivada de cada una de las siguientes funciones es igual a 2:

a) $y = x^2 - 2x$; b) $y = \frac{x}{x+2}$; c) $y = 4\sqrt{x+3}$; d) $y = \ln(4x-1)$

16. Halla los puntos en los que la derivada vale 0 en cada uno de los siguientes casos:

a) $y = 2x^2 - 8x + 5$; b) $y = -x^2 + 5x$; c) $y = x^4 - 4x^2$; d) $y = \frac{1}{x^2+1}$

17. Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^2 - 5x + 6$ en el punto de abscisa $x = 2$.

18. Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva $y = -x^2 + 2x + 5$ en el punto de abscisa $x = -1$.

19. Escribe la ecuación de la recta tangente a $y = x^2 + 4x + 1$, cuya pendiente sea igual a 2.

20. Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \sqrt{x+1}$ en $x = 0$.

21. Obtén los puntos críticos o singulares de las siguientes funciones:

a) $y = 3x^2 - 2x + 5$; b) $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$; c) $y = x^4 - 4x^3$; d) $y = x^3 - 12x$

22. Halla los puntos singulares de las siguientes funciones:

a) $y = \frac{x^2+1}{x}$; b) $y = \frac{2x^2}{x^2+1}$

23. Comprueba que las siguientes funciones no tienen puntos críticos:

a) $y = x^3 + 3x$; b) $y = \frac{1}{x}$; c) $y = \sqrt{x}$; d) $y = \ln x$

24. Observa los resultados obtenidos en el ejercicio 11 y di si cada una de las funciones es creciente o decreciente en el punto que se indica.

25. Obtén los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de cada una de las siguientes funciones:

a) $y = \frac{3x+1}{2}$; b) $y = 5 - 2x$; c) $y = x^2 - 3x + 2$; d) $y = 2x - x^2$; e) $y = x^2$; f) $y = x^3 - 3x$

26. Dada la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 4$, obtén su función derivada y estudia su signo. ¿Cuáles son los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f ? ¿Tiene f máximo o mínimo?

27. Representa una función $y = f(x)$ de la que sabemos:

- Es continua.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$
- Tiene tangente horizontal en $(-3, 2)$ y en $(1, 5)$.

Indica si los puntos de tangente horizontal son máximos o mínimos.

28. De una función sabemos que:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- Su derivada es igual a 0 en $(-2, 2)$ y en $(2, -1)$.
- Corta a los ejes en $(0, 0)$ y en $(4, 0)$.

Representala gráficamente.

29. Comprueba que la función $y = (x-1)^3$ pasa por los puntos $(0, -1)$, $(1, 0)$ y $(2, 1)$. Su derivada se anula en el punto $(1, 0)$. ¿Puede ser un máximo o un mínimo ese punto?

30. Comprueba que la función $y = \frac{2x^2}{x^2 + 1}$

- Tiene derivada nula en $(0, 0)$.
- La recta $y = 2$ es una asíntota horizontal.
- La posición de la curva respecto a la asíntota anterior es $y < 2$ si $x \rightarrow +\infty$, $y > 2$ si $x \rightarrow -\infty$.

Representala.

31. Escribe las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = x^3 - 3x$ que sean paralelas a la recta $6x - y + 10 = 0$.

32. Escribe las ecuaciones de las rectas tangentes a la función $y = 4 - x^2$ en los puntos de corte con el eje de abscisas.

33. a) ¿Cuál es la derivada de $y = 2x + 8$ en cualquier punto?

b) ¿Cuánto ha de valer x par que la derivada de $y = x^2 - 6x + 5$ sea igual a 2?

c) ¿En qué punto la recta tangente a la gráfica de la función $y = x^2 - 6x + 5$ es paralela a la recta $y = 2x + 8$?

34. ¿En qué puntos la recta tangente a $y = x^3 - 4x$ tiene pendiente igual a 8?

35. Escribe las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = \frac{2x}{x-1}$ que son paralelas a la recta $2x + y = 0$.

36. Halla los puntos de tangente horizontal de la función $y = x^3 - 3x^2 - 9x - 1$.

37. ¿En qué puntos de $y = \frac{1}{x}$ la recta tangente es paralela a la bisectriz del segundo cuadrante?

38. La ecuación de la recta tangente a una función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$ es $4x - 3y + 1 = 0$. ¿Cuál es el valor de $f'(2)$? ¿Y el de $f(2)$?

39. Aplica las propiedades de los logaritmos para derivar las siguientes funciones.

a) $f(x) = \ln \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$; b) $f(x) = \ln \sqrt{\frac{x}{x^2 + 1}}$; c) $f(x) = \ln(x \cdot e^{-x})$; d) $f(x) = \log \frac{(3x-5)^3}{x}$;

e) $f(x) = \log(\operatorname{tg} x)^2$; f) $f(x) = \ln x^x$

40. En cada una de las siguientes funciones, halla los puntos críticos o singulares y, con ayuda de las ramas infinitas, decide si son máximos o mínimos. Representálas.

a) $y = x^3 - 3x^2$; b) $y = x^3 - 3x + 2$; c) $y = x^4 + 4x^3$; d) $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 20$; e) $y = 12x - x^3$;
f) $y = -x^4 + x^2$; g) $y = x^5 - 6x^3 - 8x - 1$; h) $y = x^4 - 8x^2 + 2$

41. Representa las siguientes funciones hallando los puntos críticos o singulares y estudiando sus ramas infinitas.

a) $y = x^3 - 2x^2 + x$; b) $y = -x^4 + 2x^2$; c) $y = \frac{x}{x^2 + 5x + 4}$;
d) $y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$; e) $y = \frac{x}{(x+5)^2}$; f) $y = \frac{2x^2}{x+2}$

42. Comprueba que estas funciones no tienen puntos de tangente horizontal. Representálas estudiando sus ramas infinitas y los puntos de corte con los ejes.

a) $y = \frac{x-3}{x+2}$; b) $y = \frac{x^2-1}{x}$; c) $y = \frac{x^3}{3} + 4x$; d) $y = \frac{1}{(x-2)^2}$

43. Estudia y representa las siguientes funciones:

a) $y = \frac{x}{x^2-16}$; b) $y = \frac{x}{1-x^2}$; c) $y = \frac{x+2}{x^2-6x+5}$; d) $y = \frac{(x-1)^2}{x+2}$; e) $y = \frac{x^2-1}{x+2}$; f) $y = \frac{x^2}{1-x^2}$;
g) $y = \frac{x^2}{x^2-4x+3}$; h) $y = \frac{x^2}{(x-2)^2}$; i) $y = \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$; j) $y = \frac{x^2-5}{2x-4}$

44. Halla una función de segundo grado sabiendo que pasa por $(0, 1)$ y que la pendiente de la recta tangente en el punto $(2, -1)$ vale 0.

45. Halla el vértice de la parábola $y = x^2 + 6x + 11$ teniendo en cuenta que en ese punto la tangente es horizontal.

46. Determina la parábola $y = ax^2 + bx + c$ que es tangente a la recta $y = 2x - 3$ en el punto $A(2, 1)$ y que pasa por el punto $B(5, -2)$.

47. Determina el valor de x para que las tangentes a las curvas $y = 3x^2 - 2x + 5$ e $y = x^2 + 6x$ sean paralelas y escribe las ecuaciones de esas tangentes.

48. Halla a , b y c en $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ de modo que la gráfica de f tenga tangente horizontal en $x = -4$ y en $x = 0$ y que pase por $(1, 1)$.

49. Halla el valor de k para que la tangente a la gráfica de la función $y = x^2 - 5x + k$ en $x = 1$ pase por el origen de coordenadas.

50. Demuestra, utilizando la derivada, que la abscisa del vértice de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ es $x = -\frac{b}{2a}$.

51. Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \ln x$ que es paralela a la recta $y = 3x - 2$.

52. ¿Tiene algún punto de tangente horizontal la función $y = \operatorname{tg} x$?

53. El coste total (en dólares) de fabricación de q unidades de cierto artículo es $C(q) = 3q^2 + 5q + 75$. El coste medio por unidad es $M(q) = \frac{C(q)}{q}$. ¿Cuántas unidades se deben fabricar para que el coste medio por unidad sea mínimo? Calcula $C(q)$ y $M(q)$ para el valor de q que has hallado anteriormente.