

- Dado el polinomio  $P(x) = -13x^2 + 6x^3 + 8x - 3$ , di cuál es su grado, su coeficiente líder o principal, y su término independiente.
- Encuentra el valor numérico de  $P(x) = -x^5 + 3x^4 - 2x^2 + 2$  para  $x = \frac{1}{2}$ ,  $x = 2$  y  $x = \frac{-2}{3}$ .
- Encuentra el valor numérico de  $Q(x) = 3x^2 - 2x + 2$  para  $x = 1 - \sqrt{2}$ ,  $x = \sqrt{2} - \sqrt{3}$  y  $x = \frac{1}{2} - 2\sqrt{2}$ .
- Dado el polinomio  $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ , calcula  $P(7,5)$  y  $P(-3)$  de dos formas diferentes.
- Halla el valor numérico del polinomio  $P(x) = x^6 + 4x^5 - 2x + 3$  para  $x = -2$ . ¿Es divisible  $P(x)$  entre  $x + 2$ ?
- Halla  $m$  para que al dividir el polinomio  $2x^4 + 9x^3 + 2x^2 - 6x + m$  entre  $x + 4$ , el resto sea igual a 12.
- Halla el valor de  $m$  para que el polinomio  $5x^4 + mx^2 + 2x - 3$  sea divisible por  $x + 1$ .
- Encuentra  $k$ , el término independiente del polinomio  $p(x) = x^2 - 9x + k$ , sabiendo que  $x = 3$  es una raíz del polinomio. ¿Tiene otra raíz?
- Halla  $a$  y  $b$  para que el polinomio  $x^3 - x^2 + ax + b$  sea divisible por  $(x - 1)^2$ .
- Realiza las siguientes operaciones y simplifica el resultado:
  - $(-2x^3 - 5x^2 - x + 1) \cdot (2x^4 - 2x - 3)$
  - $(x^2 - 3x + 1)^2$
  - $(2x - 1)^3$
  - $(x^4 + x^2 + 1) \cdot (x^3 + x + 1)$
- Calcula el cociente y el resto de la división  $P(x) : Q(x)$  en los siguientes casos:
  - $P(x) = x^4 - 5x^3 - 2x^2 - 7x + 2$  ;  $Q(x) = x^2 + 2x - 2$
  - $P(x) = x^5 + x^3 - x^2 - 7x - 1$  ;  $Q(x) = -x^2 - 3x + 1$
  - $P(x) = x^6 - 5x^4 - 5x^3 - 2x^2 - 7x + 2$  ;  $Q(x) = -x^3 - 2x^2 + 2x - 2$
- Dados los polinomios  $P(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 1$ ,  $Q(x) = -3x^4 + x^3 + 7x^2 - x + 4$  y  $R(x) = -2x^2 - x - 1$ , realiza las siguientes operaciones:
  - $(P(x) + 2Q(x)) \cdot R(x)$
  - $P(x) \cdot R(x) + Q(x)$
  - $(3P(x) - 2Q(x)) \cdot R(x)$
- Calcula el cociente y el resto de las divisiones siguientes utilizando la regla de Ruffini:
  - $(x^4 - x^2 - 1) : (x + 2)$
  - $(x^5 - x^3 - x) : (x - 2)$
  - $(x^3 + x^2 + x + 1) : (2x + 1)$
  - $(x^4 - 2x + 1) : (x - 1)$
  - $(x^4 + x^2 - 4) : (2x - 3)$
  - $(2x^3 + 5x^2 + 3) : (2x + 1)$
  - $(x^7 + x^2 - 1) : (x + 1)$
- Escribir como producto de factores los siguientes polinomios y di cuales son sus raíces:
  - $x^6 - 9x^5 + 24x^4 - 20x^3$
  - $6x^4 - 5x^3 - 23x^2 + 20x - 4$
  - $2x^3 - 3x^2 - 9x + 10$
  - $x^5 - 16x$
  - $x^3 - 2x^2 - x + 2$
  - $x^4 - 5x^2 + 4$
  - $x^6 + 6x^5 + 9x^4 - x^2 - 6x - 9$
  - $x^5 - 7x^4 + 10x^3 - x^2 + 7x - 10$
  - $x^6 - 3x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 8x$
  - $4x^2 - 25$
  - $4x^2 + 4x + 1$
  - $x^5 - 2x^4 - 11x^3 + 4x^2 + 28x + 16$
- Intenta factorizar el polinomio  $x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 7x + 4$ . Hazlo ahora sabiendo que es divisible por el polinomio  $x^2 + x + 1$ .
- Intenta factorizar el polinomio  $6x^4 + 7x^3 + 6x^2 - 1$ . Vuelve a intentarlo sabiendo que  $-\frac{1}{2}$  y  $\frac{1}{3}$  son raíces suyas.
- Escribe un polinomio cuyas raíces sean 1, 4,  $-4$  y 0.
- Escribe un polinomio de grado 4 que solo tenga por raíces 0 y 1.
- Encuentra las raíces del polinomio  $P(x) = x^6 - 4x^5 - 2x^4 + 20x^3 - 11x^2 - 16x + 12$

20. Resuelve las siguientes ecuaciones, factorizando previamente:

- a)  $x^3 - 7x - 6 = 0$  ; b)  $2x^3 - 3x^2 - 9x + 10 = 0$  ; c)  $x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 = 0$  ; d)  $3x^3 - 10x^2 + 9x - 2 = 0$  ;  
e)  $x^5 - 16x = 0$  ; f)  $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$  ; g)  $x^3 - x^2 + 4x - 4 = 0$  ; h)  $3x^5 + x^4 - 9x^3 - 9x^2 - 2x = 0$  ;  
i)  $\frac{1}{2}x^3 + 2x^2 + \frac{5}{2}x + 1 = 0$  ; j)  $x^3 - \frac{7}{3}x^2 - \frac{70}{3}x + 8 = 0$  ; k)  $(9x^2 - 1)(2x + 3)^2 = 0$  ; l)  $(x - 1)^3(x^3 - 4x) = 0$

21. Halla, en cada uno de los siguientes casos, el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de  $A(x)$  y  $B(x)$ , es decir,  $\text{mcd}[A(x), B(x)]$ ,  $\text{mcm}[A(x), B(x)]$ :

- a)  $A(x) = x^2 + x - 12$  ;  $B(x) = x^3 - 9x$   
b)  $A(x) = x^3 + x^2 - x - 1$  ;  $B(x) = x^3 - x$   
c)  $A(x) = x^6 - x^2$  ;  $B(x) = x^3 - x^2 + x - 1$

22. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

- a)  $\frac{9 - x^2}{x^2 - 3x}$  ; b)  $\frac{3x^3 - 2x^2 - 7x - 2}{x^3 - 4x}$  ; c)  $\frac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x^3 - 2x^2}$  ; d)  $\frac{x + 2}{x^3 - 3x + 2}$  ; e)  $\frac{x^3 - 4x^2 + x + 6}{x^2 - 7x + 6}$  ; f)  $\frac{x^4 - 16}{x^3 - 8}$

23. Reduce previamente a común denominador las fracciones algebraicas siguientes y súmalas:

$$\frac{x+7}{x} ; \frac{x-2}{x^2+x} ; -\frac{2x+1}{x+1}$$

24. Efectúa las siguientes operaciones con fracciones algebraicas y simplifica, si es posible, el resultado:

- a)  $\frac{1}{x^2-1} + \frac{2x}{x+1} - \frac{x}{x-1}$  ; b)  $\frac{x^2-2x-3}{x+5} \cdot \frac{2x+3}{x-3}$  ; c)  $\frac{x^2-2x+3}{x-2} : \frac{2x+3}{x+5}$  ; d)  $\frac{x+2}{x} : \left(\frac{x+1}{3} \cdot \frac{x}{2x+1}\right)$  ;  
e)  $\frac{x^4-x^2}{x^2+1} \cdot \frac{x^4+x^2}{x^4}$  ; f)  $\frac{3a+3}{12a-12} : \frac{(a+1)^2}{a^2-1}$  ; g)  $\frac{x^2+2x-3}{(x-2)^3} \cdot \frac{(x-2)^2}{x^2-1}$  ; h)  $\frac{x}{x-2} - \frac{x}{x-1} - \frac{x}{x^2-3x+2}$  ;  
i)  $\left(\frac{x+1}{x} - \frac{x}{x+2}\right) : \left(1 + \frac{x}{x+2}\right)$  ; j)  $\left(1 - \frac{x+1}{x+2} \cdot \frac{x+3}{x+2}\right) : \frac{1}{x+2}$  ; k)  $\left(\frac{x^2}{x^2-1} - \frac{x}{x+1}\right) : \frac{3x}{x-1}$  ; l)  $\frac{\frac{10x-2}{x^2-1}}{\frac{3}{x+1} + \frac{2}{x-1}}$

25. Resuelve la ecuación:  $\frac{x-1}{x^2+2x} - \frac{2}{x^2-2x} - \frac{x}{x^2-4} = 0$

26. Demuestra que las siguientes igualdades son ciertas, es decir, que son identidades:

- a)  $\left(\frac{1}{1+x} + \frac{2x}{1-x^2}\right) \left(\frac{1}{x} - 1\right) = \frac{1}{x}$  ; b)  $\frac{a^2-1}{a^2-3a+2} : \frac{a^2+2a+1}{a^2-a-2} = 1$  ; c)  $\left(\frac{x-2}{x-3} - \frac{x-3}{x-2}\right) : \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}\right) = 2x-5$

27. Determina  $a$  y  $b$  para que se cumpla cada una de las igualdades siguientes:

- a)  $(x-a)(x-b) = x^2 + 3x + 8$  ; b)  $x^2 - ax + b = (x+2)(x-3)$  ; c)  $\frac{8x+9}{(x-2)(x+3)} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+3}$

28. Calcula  $m$  y  $n$  en el polinomio  $x^2 + mx + n$  para que sea divisible por  $x-2$  y por  $x+5$ .

29. Dado el polinomio  $x^2 + kx + 8$ , calcula  $k$  sabiendo que una raíz es doble que la otra. ¿Cuáles son las raíces?

30. Calcula  $a$  y  $b$  en el polinomio  $P(x) = x^5 - 2x^4 - ax^3 + bx^2 + 13x + 6$ , si sabemos que es divisible por el polinomio  $Q(x) = x^2 - 5x + 6$ .

## Soluciones

- Grado: 3. Coeficiente líder o principal: 6. Término independiente:  $-3$ .
- $P\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{53}{32}$ ,  $P(2) = 10$ ,  $P\left(\frac{-2}{3}\right) = \frac{446}{243}$ .
- $Q(1-\sqrt{2}) = 9-4\sqrt{2}$ ,  $Q(\sqrt{2}-\sqrt{3}) = 17-6\sqrt{6}-2\sqrt{2}+2\sqrt{3}$ ;  $Q\left(\frac{1}{2}-2\sqrt{2}\right) = \frac{103}{4}-2\sqrt{2}$ .
- $P(a)$  se puede hallar sustituyendo directamente por  $x=a$  o mirando el resto de dividir  $P(x)$  entre  $x-a$  (teorema del resto). En cualquier caso:  $P(7,5) = 303,875$ ,  $P(-3) = -40$ .
- $P(-2) = -57$ .  $P(x)$  no es divisible entre  $x+2$  porque  $P(-2) \neq 0$  (teorema del resto).
- $m = 20$ .
- $m = 0$ .
- $k = 18$ . Sí, la otra raíz es  $x = 6$ .
- $a = -1$ ,  $b = 1$
- a)  $-4x^7 - 10x^6 - 2x^5 + 6x^4 + 16x^3 + 17x^2 + x - 3$ ; b)  $x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x + 1$ ; c)  $8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$ ; d)  $x^4 + x^3 + x^2 + x + 2$
- a) Cociente:  $x^2 - 7x + 14$ , Resto:  $-49x + 30$ ; b) Cociente:  $-x^3 + x^2 - 3x + 5$ , Resto:  $x - 4$   
c) Cociente:  $-x^3 + 2x^2 - x + 13$ , Resto:  $30x^2 - 35x + 28$
- a)  $12x^6 - 15x^4 - 22x^3 - 28x^2 - 12x - 7$ ; b)  $-2x^5 + 6x^4 - 9x^3 + 7x^2 - 7x + 5$ ; c)  $-12x^6 - 8x^5 + 51x^4 - 18x^3 + 28x^2 - 12x + 11$
- a) Cociente:  $x^3 - 2x^2 + 3x - 6$ , Resto: 11; b) Cociente:  $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 6x + 11$ , Resto: 22; c) Cociente:  $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{3}{8}$ , Resto:  $\frac{5}{8}$ ; d) Cociente:  $x^3 + x^2 + x - 1$ , Resto: 0; e) Cociente:  $\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{13}{8}x + \frac{39}{16}$ , Resto:  $\frac{53}{16}$ ; f) Cociente:  $x^2 + 2x - 1$ , Resto: 4; g) Cociente:  $x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2$ , Resto:  $-1$
- a) Factorización:  $x^3(x-2)^2(x-5)$ , Raíces: 0 (triple), 2 (doble), 5; b) Factorización:  $(x+2)(x-2)(2x-1)(3x-1) = 6(x+2)(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)$ , Raíces:  $-2, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ ; c) Factorización:  $(x-1)(x+2)(2x-5) = 2(x-1)(x+2)\left(x-\frac{5}{2}\right)$ , Raíces:  $1, -2, \frac{5}{2}$ ; d) Factorización:  $x(x+2)(x-2)(x^2+4)$ , Raíces:  $0, -2, 2$ ; e) Factorización:  $(x+1)(x-1)(x-2)$ , Raíces:  $-1, 1, 2$ ; f) Factorización:  $(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$ , Raíces:  $-1, 1, -2, 2$ ; g) Factorización:  $(x+1)(x-1)(x+3)^2(x^2+1)$ , Raíces:  $-1, 1, -3$  (doble); h) Factorización:  $(x-1)(x-2)(x-5)(x^2+x+1)$ , Raíces  $1, 2, 5$ ;

i) Factorización:  $x(x+1)(x-1)(x-4)(x^2+x+2)$ , Raíces: 0, -1, 1, 4 ;

j) Factorización:  $(2x+5)(2x-5) = 4\left(x+\frac{5}{2}\right)\left(x-\frac{5}{2}\right)$ , Raíces:  $-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}$  ;

k) Factorización:  $(2x+1)^2 = 4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$ , Raíces:  $-\frac{1}{2}$  (doble) ;

l) Factorización:  $(x+2)(x-2)(x-4)(x+1)^2$ , Raíces: -2, 2, 4, -1 (doble).

15.  $(x^2+x+1)(x^2+3x+4)$

16.  $(2x+1)(3x-1)(x^2+x+1) = 6\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)(x^2+x+1)$

17.  $x^4 - x^3 - 16x^2 + 16x$

18.  $x^4 - 2x^3 + x^2$

19. -1, 1 (doble), -2, 2, 3

20. a) -1, -2, 3 ; b) 1, -2,  $\frac{5}{2}$  ; c) -1, 1, 2, 3 ; c) -1, 1, 2, 3 ; d) 1, 2,  $\frac{1}{3}$  ; e) 0, -2, 2 ; f) 0, 1, 2 ; g)

1 ; h) 0, 2,  $-\frac{1}{3}$  ; i) -2, -1 ; j) -4, 6,  $\frac{1}{3}$  ; k)  $-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{3}{2}$  ; l) -2, 0, 1, 2

21. a) mcd:  $x-3$ , mcm:  $x(x+3)(x-3)(x+4)$  ; b) mcd:  $(x-1)(x+1)$ , mcm:  $x(x-1)(x+1)^2$  ;

c) mcd:  $(x-1)(x^2+1)$ , mcm:  $x^2(x+1)(x-1)(x^2+1)$

22. a)  $-\frac{x+3}{x}$  ; b)  $\frac{3x^2+4x+1}{x^2+2x}$  ; c)  $\frac{x-2}{x}$  ; d)  $\frac{1}{x^2-2x+1}$  ; e)  $\frac{x^3-4x^2+x+6}{x^2-7x+6}$  ; f)  $\frac{x^3+2x^2+4x+8}{x^2+2x+4}$

23.  $\frac{-x^2+8x+5}{x^2+x}$

24. a)  $\frac{x^2-3x+1}{x^2-1}$  ; b)  $\frac{2x^2+5x+3}{x+5}$  ; c)  $\frac{x^3+3x^2-7x+15}{2x^2-x-6}$  ; d)  $\frac{6x^2+15x+6}{x^3-x^2}$  ; e)  $x^2-1$  ; f)  $\frac{1}{4}$  ;

g)  $\frac{x+3}{x^2-x-2}$  ; h) 0 ; i)  $\frac{3x+2}{2x^2+2x}$  ; j)  $\frac{1}{x+2}$  ; k)  $\frac{1}{3x+3}$  ; l) 2

25.  $-\frac{2}{5}$

26. En este ejercicio se trata de hacer comprobaciones. Por tanto, no es posible escribir la solución final sin dar respuesta completamente a cada uno de los apartados. Intenta hacerlos. Los corregiremos en clase.

27. a) No hay solución ; b)  $a=1, b=-6$  ; c)  $a=5, b=3$

28.  $m=3, n=-10$

29. Hay dos posibles soluciones:

- Para  $k=-6$  las raíces son 2 y 4
- Para  $k=6$  las raíces son -2 y -4

30.  $a=6, b=4$