Unidad 10. Probabilidad

1. Experimentos aleatorios

Frente a un tipo de experimentos, cuya repetición produce idénticos resultados (experimentos deterministas), podemos considerar aquellos otros caracterizados porque no se puede prever su desenlace, a pesar de que se ejecuten siempre en las mismas condiciones. Son los *experimentos aleatorios*, de cuya existencia bien pueden servir, como ejemplo, los juegos de azar: el lanzamiento de una moneda, de un dado o la extracción de una carta en una baraja, etc. En todos ellos el resultado es incierto, aun tomando las máximas precauciones para simular idénticamente las condiciones del juego.

1.1. Espacio muestral

En toda experiencia aleatoria es conveniente conocer y enumerar el abanico de posibles manifestaciones de la misma. Cada una de ellas se llama *suceso elemental* y su conjunto constituye el *espacio muestral* del experimento, que suele representarse por la letra E.

1.1.1. Ejemplos

- El espacio muestral de los puntos obtenidos al tirar un dado es $E = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$. Cada uno de esos número es un suceso elemental.
- El espacio muestral del experimento consistente en extraer una bola de una bolsa en la que hay 3 rojas, 2 blancas y 4 verdes (V) es $E = \{R,\ B,\ V\}$. Se han llamado R, B y V a los sucesos elementales "salir bola roja", "salir bola blanca" y "salir bola verde", respectivamente.
- Si se lanzan dos monedas, y se anota el resultado obtenido, el espacio muestral será $E = \{CC,\ CX,\ XC,\ XX\}$. En este ejemplo se ha llamado C al suceso elemental "salir cara" y X al suceso elemental "salir cruz".

Cuando dos o más experimentos simples se realizan a la vez, tenemos un *experimento compuesto*. Por ejemplo, tirar un dado y una moneda a la vez, o tirar dos monedas a la vez.

1.2. Los sucesos

Todo subconjunto del espacio muestral constituye un suceso del experimento. Por tanto, un *suceso* está formado por uno o varios sucesos elementales. Los sucesos suelen denotarse con letras mayúsculas: A, B, ...

1.2.1. Ejemplos

- Sucesos del experimento aleatorio lanzar dos monedas pueden ser:

  ✓ Sacar una cara y una cruz: $A = \{CX,\ XC\}$.

  ✓ Sacar al menos una cruz: $B = \{CX,\ XC,\ XX\}$.

  Obsérvese como ambos sucesos son subconjuntos del espacio muestral $E = \{CC,\ CX,\ XC,\ XX\}$.

- En el lanzamiento de dos dados podemos considerar los siguientes sucesos:

  ✓ Suma de puntuaciones igual a 7: $C = \{(1,6),\ (6,1),\ (2,5),\ (5,2),\ (3,4),\ (4,3)\}$.

  ✓ Ambas puntuaciones menores que 3: $D = \{(1,1),\ (1,2),\ (2,1),\ (2,2)\}$.

Hay subconjuntos de todo espacio muestral E, o lo que es lo mismo, sucesos asociados a todo experimento aleatorio que merecen una especial atención. Éstos son:

- El subconjunto vacío, $\varnothing$, que al no poseer sucesos elementales (carece de elementos), se denomina *suceso imposible*.

- El conjunto E, que obviamente contiene todo suceso elemental y, por tanto, ocurrirá siempre, por lo que lo denominamos *suceso seguro*.

- Dado un subconjunto A de un espacio muestral, se puede pensar en otro subconjunto con todos los sucesos elementales que no son de A. A éste se le llama *suceso contrario o complementario de* A, que se denota $\overline{A}$. Gráficamente, si el suceso seguro E se representa por un rectángulo, $\overline{A}$ será la región del rectángulo no contenida en A (ver Figura 1).

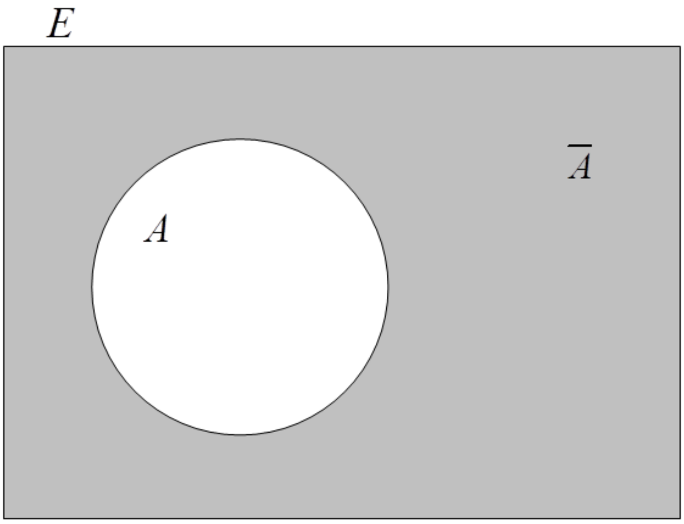


Figura 1: Complementario de A

1.2.2. Ejemplos

- El suceso contrario de sacar al menos una cruz al tirar dos monedas ($B = \{CX,\ XC,\ XX\}$) es no sacar ninguna cruz, que es lo mismo que sacar dos caras, o sea, $\overline{B} = \{CC\}$.
- Consideremos el experimento “lanzar un dado”. El suceso salir par es $A = \{2,\ 4,\ 6\}$. El suceso contrario de A será no salir par, es decir, salir impar: $\overline{A} = \{1,\ 3,\ 5\}$.

1.3. Operaciones con sucesos

Las operaciones que pueden definirse con sucesos son tres: unión, intersección y diferencia.

1.3.1. Unión de sucesos

La *unión* de dos sucesos A y B, que se denota por $A \cup B$ y se lee A unión B, es el suceso que se cumple cuando lo hace A, B o ambos a la vez. Esto es, cuando se cumple al menos uno de los sucesos A o B (Figura 2(a)).
Hay tres *propiedades de la unión de sucesos* que son evidentes:

$$\boxed{A \cup E = E \quad ; \quad A \cup \varnothing = A \quad ; \quad A \cup \overline{A} = E}$$

1.3.2. Intersección de sucesos

La *intersección* de dos sucesos A y B se denota por $A \cap B$ (que se lee A intersección B) y es el suceso que se cumple cuando lo hacen ambos sucesos a la vez (Figura 2(a)). Se dice que dos sucesos son *incompatibles* cuando su intersección es el suceso imposible: A y B incompatibles $\Rightarrow A \cap B = \varnothing$.
Las *propiedades de la intersección de sucesos* (también evidentes) son:

$$\boxed{A \cap E = A \quad ; \quad A \cap \varnothing = \varnothing \quad ; \quad A \cap \overline{A} = \varnothing}$$

1.3.3. Diferencia de sucesos

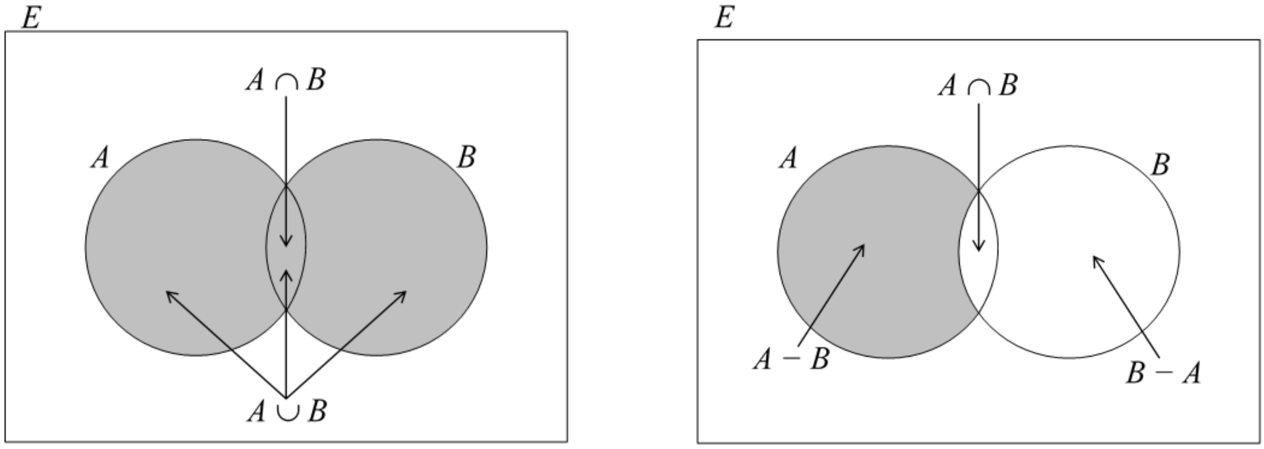
La *diferencia de dos sucesos* A y B, $A - B$, es el suceso que se presenta cuando lo hace A pero no B. Con ayuda de la Figura 2(b) puedes comprobar las siguientes propiedades:

$$\boxed{(A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A) = A \cup B \quad ; \quad A - B = A \cap \overline{B}}$$

1.3.4. Ejemplo

En el experimento lanzar un dado, consideremos los sucesos A, “salir par” y B, “salir múltiplo de 3”. Es decir, $A = \{2,\ 4,\ 6\}$, $B = \{3,\ 6\}$. Entonces:

- El suceso unión consiste en salir par o múltiplo de 3: $A \cup B = \{2,\ 3,\ 4,\ 6\}$.



(a) Unión e Intersección

(b) Diferencia de sucesos

Figura 2: Unión, Intersección y Diferencia de sucesos

- La intersección consiste en que un resultado sea simultáneamente par y múltiplo de 3, o sea: $A \cap B = \{6\}$.
- La diferencia de A y B es salir par pero no salir múltiplo de 3: $B = \{2,\ 4\}$.

1.4. Las leyes de Morgan y otras propiedades

Las leyes de Morgan dan la relación entre la unión e intersección de sucesos y sus complementarios. Son las siguientes:

$$\boxed{\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \quad ; \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}}$$

A veces no es fácil interpretar los sucesos $\overline{A \cup B}$ o $\overline{A \cap B}$. De ahí la importancia de las Leyes de Morgan. Por ejemplo, supongamos los sucesos “ser hombre” (H) y “estar casado/a” (C). Supongamos que se desea obtener el complementario de “ser hombre o estar casado/a”: $\overline{H \cup C}$. El resultado es “ser mujer soltera”. Pero esto no es tan intuitivo. Recurriendo a las Leyes de Morgan se tiene que $\overline{H \cup C} = \overline{H} \cap \overline{C}$. Interpretemos ahora el suceso $\overline{H} \cap \overline{C}$. Por un lado, $\overline{H}$ es el suceso “no ser hombre”, o sea, “ser mujer”. Por otro lado $\overline{C}$ es el suceso “no estar casado/a”, o lo que es lo mismo, “ser soltero/a”. Por tanto $\overline{H} \cap \overline{C}$ es el suceso “ser mujer y soltera”, tal y como se quería. Otras propiedades de las operaciones con sucesos son:

- **Conmutativas:** $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$.
- **Asociativas:** $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.
- **Distributivas:** $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Resuelve tú:

Consideremos, entre los habitantes de un municipio, los sucesos $A = \{\text{ser socio del casino}\}$, $B = \{\text{ser socio del club de fútbol local}\}$ y $C = \{\text{ser socio de alguna asociación juvenil}\}$.

a) Expresa en función de A, B y C las siguientes situaciones:

   a) Ser socio de alguna de esas asociaciones.
   b) Ser socio de las tres asociaciones.
   c) Ser socio del casino solamente.
   d) Ser socio de, como máximo, una o dos asociaciones.
   e) No ser socio de ninguna de las tres.
   f) Ser socio de una sola asociación.

b) Describe el significado de los siguientes sucesos:

   a) $A \cup B \cup C$.
   b) $\overline{A \cup B \cup C}$.
   c) $A \cup B - C$.
   d) $\overline{A \cap B \cap C}$.
   e) $C - (A \cup B)$.
   f) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

2. Probabilidad

La probabilidad es la medida de la incertidumbre de un suceso aleatorio. La probabilidad es un número que indica las posibilidades que tiene de verificarse ese suceso al realizar el experimento aleatorio. Estas ideas se sintetizan en la conocida Regla de Laplace, que asigna la probabilidad a cualquier suceso A, de acuerdo con el siguiente criterio:

$$P(A) = \frac{\text{Número de casos favorables a que ocurra el suceso } A}{\text{Total de casos posibles del experimento}}$$

Esta ley sólo es aplicable cuando los sucesos elementales son (se suponen *a priori*), por razones de simetría u homogeneidad, **equiprobables** (de igual probabilidad).

2.0.1. Ejemplo

En el lanzamiento de dos dados el total de casos posibles son 36. Expresando por (n, m) el resultado de una tirada, donde n es lo que sale en el primer dado y m lo que sale en el segundo, podemos escribir el espacio muestral de la siguiente manera:

$$\begin{array}{llllllll} E = \{ & (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) & \\ & (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) & \\ & (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) & \\ & (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) & \\ & (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) & \\ & (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) & \} \end{array}$$

Si los dados están correctamente construidos, los sucesos elementales (n, m) serían todos equiprobables. Entonces:

- Si llamamos A al suceso "salir ambas caras números pares" tendríamos que $P(A) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$, pues los casos favorables a que ocurra el suceso A son 9:

$$A = \{(2,2),\ (2,4),\ (2,6),\ (4,2),\ (4,4),\ (4,6),\ (6,2),\ (6,4),\ (6,6)\}$$

- Si llamamos B al suceso "la suma de las caras es igual a 9" entonces $P(B) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$, ya que ahora los casos favorables a que ocurra el suceso B son 4:

$$B = \{(3,6),\ (6,3),\ (4,5),\ (5,4)\}$$

Resuelve tú:

En el experimento consistente en lanzar tres monedas, halla la probabilidad de los siguientes sucesos: A: "sacar más caras que cruces", B: "sacar al menos una cruz" y C: "sacar como máximo dos cruces".

2.1. Definición axiomática

De una manera formal, la probabilidad puede definirse diciendo que: es una función P que asigna a cada suceso un número real, debiendo cumplirse las siguientes condiciones:

1. Ese número está entre 0 y 1. Esto es, para cualquier suceso A: $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.
2. La probabilidad de E (el espacio muestral o suceso seguro) es 1: $P(E) = 1$.
3. Si A y B son sucesos incompatibles, es decir, si $A \cap B = \varnothing$, entonces: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Las tres consecuencias más importantes de esta definición son:

a) Probabilidad del complementario de un suceso A:

$$\boxed{P(\overline{A}) = 1 - P(A)}$$

Demostración.
Sabemos que A y $\overline{A}$ son incompatibles ($A \cap \overline{A} = \varnothing$), luego por el punto 3 de la definición axiomática $P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$. Además, por el punto 2, $P(E) = 1$. Entonces:

$$\begin{aligned} A \cup \overline{A} = E \quad &\Rightarrow \quad P(A \cup \overline{A}) = P(E) \\ &\Rightarrow \quad P(A) + P(\overline{A}) = 1 \\ &\Rightarrow \quad P(\overline{A}) = 1 - P(A) \end{aligned}$$

b) Probabilidad de la diferencia de dos sucesos:

$$\boxed{P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)}$$

Demostración.
El suceso A es la unión de $A - B$ y $A \cap B$, es decir, $A = (A - B) \cup (A \cap B)$. Además los sucesos $A - B$ y $A \cap B$ son incompatibles, pues su intersección es vacía (véase la figura 2(b)). Entonces:

$$\begin{aligned} P(A) = P\left((A - B) \cup (A \cap B)\right) \quad &\Rightarrow \quad P(A) = P(A - B) + P(A \cap B) \\ &\Rightarrow \quad P(A) - P(A \cap B) = P(A - B) \\ &\Rightarrow \quad P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) \end{aligned}$$

c) Para dos sucesos cualesquiera A y B se tiene:

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

Demostración.
Teniendo en cuenta que la unión de dos sucesos se puede escribir como la unión de tres sucesos incompatibles: $A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)$ (véase otra vez la figura 2), tenemos:

$$\begin{aligned} & P(A \cup B) = P\left((A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)\right) \\ \Rightarrow \quad & P(A \cup B) = P(A - B) + P(A \cap B) + P(B - A) \\ \Rightarrow \quad & P(A \cup B) = P(A) - P(A \cap B) + P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) \\ \Rightarrow \quad & P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{aligned}$$

2.1.1. Ejemplo

Supongamos que son conocidas las probabilidades de los sucesos A, B y $A \cup B$, asociados a un experimento aleatorio: $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{2}{5}$ y $P(A \cup B) = \frac{1}{15}$. Con estos datos es posible calcular las probabilidades de los siguientes sucesos:

- Que se cumplan alguno de los dos sucesos A o B.
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} - \frac{1}{15} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$
- Que no se cumpla A y sí B.
$$P(\overline{A} \cap B) = P(B \cap \overline{A}) = P(B - A) = P(B) - P(B \cap A) = \frac{2}{5} - \frac{1}{15} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$
- Que se cumpla uno de los dos solamente.
Se debe excluir la intersección para que se cumpla uno de los dos solamente. Por tanto, este es el suceso $(A - B) \cup (B - A)$. Entonces:
$$P((A - B) \cup (B - A)) = P(A - B) + P(B - A) =$$
$$= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(B \cap A) =$$
$$= P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} - \frac{2}{15} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$
- Que no se cumpla ni A ni B.
Este suceso es $\overline{A} \cap \overline{B}$ que, por las Leyes de Morgan, es igual a $\overline{A \cup B}$. Entonces:
$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Véase la figura 3 de la página siguiente para tener una idea gráfica de las probabilidades halladas en este ejemplo.

Resuelve tú:

Un estudiante hace dos pruebas en un mismo día. La probabilidad de que pase la primera es 0,6, la probabilidad de que pase la segunda es 0,8 y la de que pase ambas es 0,5. Se pide:

a) Probabilidad de que pase al menos una prueba.

b) Probabilidad de que no pase ninguna prueba.

c) Probabilidad de que pase la primera pero que no pase la segunda.

d) Probabilidad de que pase exactamente una.

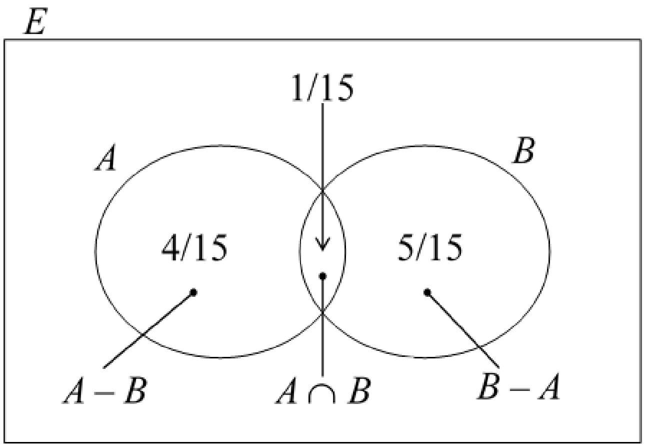


Figura 3: Probabilidades de los sucesos del ejemplo anterior

3. Experimentos compuestos. Diagramas de árbol

Ya vimos que cuando un experimento aleatorio consiste en la realización de dos o más experiencias simples, éste se llama experimento compuesto. Este tipo de experiencias son numerosas.

El espacio muestral del experimento compuesto se obtiene a partir de los espacios muestrales de los experimentos simples que lo componen. Recibe el nombre de *espacio compuesto* o *espacio producto*. El cálculo de probabilidades de los sucesos que ocurren en los experimentos compuestos se efectúa en función de las probabilidades de los sucesos elementales de las experiencias simples que forman el experimento aleatorio. Es importante entonces tener en cuenta el siguiente resultado:

La probabilidad de un suceso elemental de un espacio compuesto puede calcularse multiplicando las probabilidades de los sucesos elementales de las experiencias simples que conforman la experiencia compuesta.

3.0.1. Ejemplos

- Supongamos que se realiza el experimento "lanzar tres monedas" ¿Cuál es la probabilidad de que en un lanzamiento salgan tres caras?

  Solución:

  En el experimento simple, "lanzar una moneda", la probabilidad de que salga cara es $P(C) = \frac{1}{2}$. Por tanto en el experimento compuesto "lanzar tres monedas" la probabilidad de que salgan tres caras es $P(CCC) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$. Merece la pena resaltar que esta forma de proceder es más cómoda que buscar el espacio muestral del experimento compuesto

$$E = \{CCC,\ CCX,\ CXC,\ XCC,\ CXX,\ XCX\ XXC,\ XXX\}$$

y luego aplicar la Regla de Laplace (obsérvese que, evidentemente, sólo hay un caso favorable de entre los ocho posibles): $P(CCC) = \frac{1}{8}$.

- Dos personas A y B, organizan el siguiente juego: tiran un dado tres veces. Si sale algún 1, gana A. Si no sale ningún 1, gana B. ¿Cuál de las dos personas tiene más probabilidad de ganar?

  Solución:

  Calculamos las probabilidades de ganar de cada una de las personas. Las probabilidades asociadas a cada una de las tiradas pueden verse en el diagrama de árbol de la figura 4. La probabilidad de que no salga el número 1 al tirar un dado es $\frac{5}{6}$, y la probabilidad de que no salga ningún 1 al tirar el dado tres veces es $\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^3$.

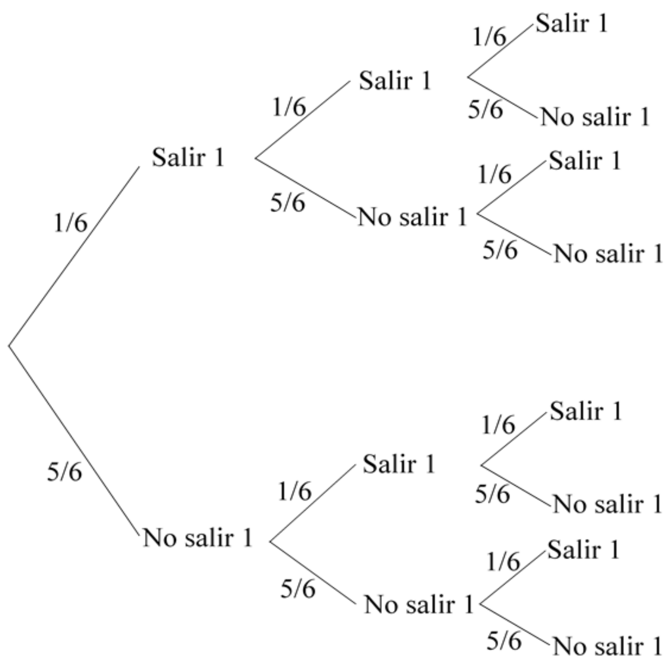
  

  Figura 4: Diagrama de árbol

  De esta forma tenemos las siguientes posibilidades:

  La probabilidad de que gane B es

  $$P(\text{no salir ningún } 1) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 \approxeq 0{,}5787$$

  La probabilidad de que gane A es

  $$P(\text{salir algún } 1) = 1 - P(\text{no salir ningún } 1) = 1 - 0{,}5787 = 0{,}4213$$

Se observa pues que tiene más probabilidades de ganar el jugador B.

- Una casa tiene dos escaleras. La escalera A tiene 10 pisos, en cuatro de ellos hay joyas; en la escalera B, cinco pisos tienen joyas y cinco no. Un ladrón entra al azar en una de las escaleras y luego en uno de los pisos. ¿Cuál es la probabilidad de que entre en un piso con joyas?

  Solución:

  Teniendo en cuenta el diagrama de árbol de la figura 5, con las probabilidades que aparecen en sus ramas, se obtiene la probabilidad siguiente:

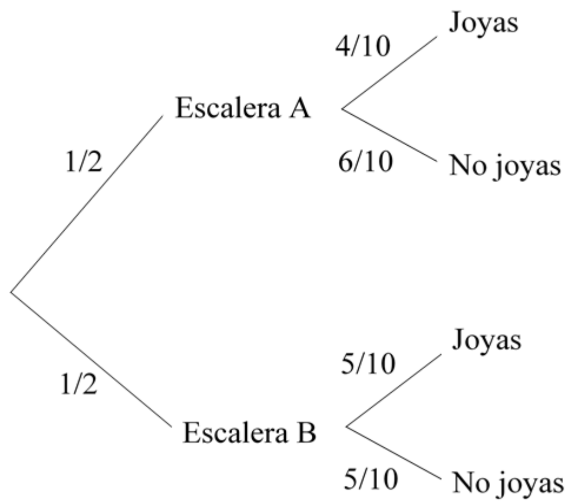


Figura 5: Otro diagrama de árbol

$$P(\text{joyas}) = P(\text{joyas en escalera A}) + P(\text{joyas en escalera B}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{10}+\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{10} = \frac{4}{20}+\frac{5}{20} = \frac{9}{20} = 0{,}45$$

4. Probabilidad condicionada

La probabilidad de un suceso A puede verse alterada si la información de que disponemos se incrementa, reduciendo, de este modo, la incertidumbre inherente al experimento aleatorio. Este incremento de información se traduce en una disminución de los casos posibles, aumentando, por tanto, la probabilidad de A.
Como ejemplo, volvamos otra vez al experimento aleatorio consistente en lanzar tres monedas, cuyo espacio muestral es

$$E = \{CCC,\ CCX,\ CXC,\ XCC,\ CXX,\ XCX\ XXC,\ XXX\}$$

Consideremos el suceso A={sacar dos caras}, cuya probabilidad es $P(A) = \frac{3}{8}$ (3 casos favorables de 8 posibles). Supongamos por un momento que, en esa tirada, disponemos de una información

adicional: ha salido al menos una cruz. Entonces los casos posibles se reducen a siete (todos menos el CCC). Por tanto, ahora, la probabilidad del suceso A={sacar dos caras} sabiendo que a ocurrido B={ha salido al menos una cruz} (al que llamamos *suceso A condicionado por B* y se escribe A/B), es: $P(A/B) = \frac{3}{7}$.
Observa que 3 son los casos comunes a A y a B, esto es, favorables a $A \cap B$, siendo entonces $P(A \cap B) = \frac{3}{8}$. Por otra parte $P(B) = \frac{7}{8}$. Y como la probabilidad del suceso A/B es el cociente entre casos favorables y caso posibles se tiene que:

$$P(A/B) = \frac{3}{7} = \frac{3/8}{7/8} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Esto sugiere definir la probabilidad condicionada de un suceso A por otro B, como:

$$\boxed{P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad , \quad P(B) \neq 0}$$

Del mismo modo:

$$\boxed{P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad , \quad P(A) \neq 0}$$

4.0.1. Ejemplo

Supongamos que en un Instituto de Secundaria hay 500 alumnos de Bachillerato, y que se distribuyen, por cursos y modalidades, según se muestra en la siguiente tabla:

	Curso 1º	Curso 2º	Total
Tecnológico	80	60	140
Ciencias Sociales	100	90	190
Ciencias Naturales	85	85	170
Total	265	235	500

Si designamos por T, S, N los sucesos consistentes en cursar Bachillerato Tecnológico, de Ciencias Sociales o de Ciencias Naturales, respectivamente, y por I y II ser de primero o segundo curso, se tiene:

$$P(T) = \frac{140}{500} \qquad P(S) = \frac{190}{500} \qquad P(N) = \frac{170}{500}$$

Mientras que las mismas probabilidades condicionadas por ser de primer curso serán:

$$P(T/I) = \frac{80}{265} \qquad P(S/I) = \frac{100}{265} \qquad P(N/I) = \frac{85}{265}$$

Obsérvese que, en todos los casos, es válida la fórmula de la probabilidad condicionada:

$$P(T/I) = \frac{P(T \cap I)}{P(I)} = \frac{80/500}{265/500} = \frac{80}{265}$$

$$P(S/I) = \frac{P(S \cap I)}{P(I)} = \frac{100/500}{265/500} = \frac{100}{265}$$
$$P(N/I) = \frac{P(N \cap I)}{P(I)} = \frac{85/500}{265/500} = \frac{85}{265}$$

Análogamente se puede comprobar, por ejemplo, que (es conveniente interpretar cada una de las probabilidades condicionadas):

$$P(T/II) = \frac{60}{235} \qquad P(II/T) = \frac{60}{140} \qquad P(I/S) = \frac{100}{190}$$

4.1. Probabilidad de la intersección de sucesos

La fórmula de la probabilidad condicionada permite determinar una expresión sencilla para hallar $P(A \cap B)$, pues de la fórmula de la probabilidad condicionada $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ se deduce, despejando, que:

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A)P(B/A)}$$

Para la intersección de tres sucesos se tendría:

$$P(A \cap B \cap C) = P((A \cap B) \cap C) = P(A \cap B)P(C/A \cap B) = P(A)P(B/A)P(C/A \cap B)$$

Por tanto:

$$\boxed{P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B/A)P(C/A \cap B)}$$

Generalizando, para n sucesos:

$$\boxed{P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1 \cap A_2) \cdots P(A_n/A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1})}$$

4.1.1. Ejemplo

Un opositor se sabe 35 temas de los 50 de que consta el temario. La prueba consiste en responder a tres temas elegidos al azar. Calcula qué probabilidad tiene de superar la oposición si para ello hay que contestar correctamente a los tres temas.

Solución:

Supongamos que en la oposición salen, una vez realizado el sorteo, los temas A, B y C. Para aprobar hay que contestar correctamente a los tres temas: suceso $A \cap B \cap C$.

De contestar correctamente al tema A tiene 35 opciones de 50: $P(A) = \dfrac{35}{50}$.

Una vez contestado correctamente al tema A, de contestar correctamente al tema B tiene 34 opciones entre los 49 temas que restan: $P(B/A)=\frac{34}{49}$ (obsérvese que esta probabilidad es la de contestar correctamente al tema B sabiendo que se ha contestado correctamente al tema A).

Si ya ha contestado correctamente a los temas A y B, de contestar correctamente al tema C tiene 33 opciones entre los 48 temas que restan: $P(C/A\cap B)=\frac{33}{48}$.

Entonces, la probabilidad de contestar correctamente a los tres temas es:

$$P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B/A)P(C/A\cap B)=\frac{35}{50}\cdot\frac{34}{49}\cdot\frac{33}{48}=\frac{39270}{117600}\approxeq 0{,}334$$

5. Independencia de sucesos

La finalidad de la probabilidad condicionada es recoger la influencia que puede ejercer un suceso sobre otro. Si esta influencia no existiera, se habla de *independencia* de los sucesos. En consecuencia, se dice que *un suceso A es independiente de otro B* si $P(A/B)=P(A)$, es decir, la presencia de B no influye en la probabilidad de que A ocurra o no.

En este caso, de acuerdo con la definición de probabilidad condicionada, $P(A/B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$, la igualdad $P(A/B)=P(A)$ se puede escribir: $\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=P(A)$. Despejando $P(A\cap B)$:

$$\boxed{P(A\cap B)=P(A)P(B)}$$

Además, si A es independiente de B, la probabilidad condicionada del suceso B/A es

$$P(B/A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{P(B)P(A)}{P(A)}=P(B)$$

con lo que $P(B/A)=P(B)$, lo que significa que B es independiente de A. En consecuencia, la independencia entre dos sucesos exige la reciprocidad entre ambos, es decir, si A es independiente de B, entonces B es independiente de A y viceversa.
Obsérvese por tanto que si los sucesos A y B son independientes las igualdades $P(A/B)=P(A)$, $P(A\cap B)=P(A)P(B)$ y $P(B/A)=P(B)$, son equivalentes.

Teorema 5.1. *La independencia se conserva con la operación de complementariedad. Es decir, si A y B son sucesos independientes, entonces:*

$$\boxed{P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B})}$$

Demostración:
Partiendo de que A y B son sucesos independientes, se trata de comprobar que los sucesos $\overline{A}$ y $\overline{B}$ también lo son. Esto es, de $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, hay que concluir que $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A})P(\overline{B})$.
En efecto: $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) = 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B) = 1 - P(A) - P(B)(1 - P(A)) = P(\overline{A}) - P(B)P(\overline{A}) = P(\overline{A})(1 - P(B)) = P(\overline{A})P(\overline{B})$, tal y como se quería demostrar.

Nota: *es conveniente que se intenten justificar, pensando en la propiedad correspondiente, cada uno de los pasos que se han dado en esta demostración.*

La independencia de tres o más sucesos se caracteriza como sigue:

- Si los sucesos A, B y C son independientes, entonces

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$$

  Sin embargo, no es cierto el recíproco. Esto es, de $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$ no se concluye necesariamente que A, B y C sean independientes. Para ello es necesario comprobar que son *independientes dos a dos*, esto es:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)\ ;\ P(A \cap C) = P(A)P(C)\ ;\ P(B \cap C) = P(B)P(C)$$

- En general, si los sucesos A_1, A_2, A_3, ..., A_n son independientes, entonces:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) \cdots P(A_n)$$

  Como antes, esa igualdad no bastaría para asegurar la independencia de los n sucesos; habría que compararlos dos a dos, tres a tres, ..., n a n.

5.0.1. Ejemplo

Un tirador tiene una probabilidad de 0,8 de dar en el blanco. Si realiza tres disparos, calcula la probabilidad de haber hecho diana:

a) Con algún disparo.

b) Con dos disparos.

Solución:
Llamemos A, B y C a los sucesos "haber hecho blanco en los disparos 1º, 2º ó 3º". Estos sucesos son independientes, así como sus complementarios (no haber hecho blanco): $\overline{A}$, $\overline{B}$ y $\overline{C}$.

a) El suceso fallar los tres disparos viene representado por $\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}$. Hallemos su probabilidad:

$$P(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})=P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C})=(1-0{,}8)(1-0{,}8)(1-0{,}8)=0{,}008$$

Haber hecho diana con algún disparo es el suceso contrario de haber fallado los tres, por lo que

$$P(\text{acertar con algún disparo})=1-0{,}008=0{,}002$$

b) Haber hecho diana con dos disparos es el suceso $(A\cap B\cap\overline{C})\cup(A\cap\overline{B}\cap C)\cup(\overline{A}\cap B\cap C)$, cuya probabilidad será:

$$P((A\cap B\cap\overline{C})\cup(A\cap\overline{B}\cap C)\cup(\overline{A}\cap B\cap C))=$$
$$=P(A\cap B\cap\overline{C})+P(A\cap\overline{B}\cap C)+P(\overline{A}\cap B\cap C)=$$
$$=0{,}8\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2+0{,}8\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8+0{,}2\cdot 0{,}8\cdot 0{,}8=0{,}384$$

6. Probabilidad total

Con frecuencia, cuando se contempla la ocurrencia de un suceso, se han de analizar diversos escenarios en los que haya podido ocurrir, no siendo uno solo el responsable de su acaecimiento. Por ejemplo, un accidente de automóvil puede ocurrir como consecuencia de conducir ebrio, de que ha llovido, de que hay niebla, etc.; y también no ocurrir, aun dándose algunas de esas circunstancias. En general, un suceso B, de un espacio muestral E, puede depender de otros n sucesos A_i, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$, incompatibles entre sí y tales que su unión sea el espacio muestral E. Esto es:

$$A_i\cap A_j=\varnothing\quad \text{y} A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n=E$$

Entonces, como $B=B\cap E$, se tiene que

$$B=B\cap(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n)=(B\cap A_1)\cup(B\cap A_2)\cup\ldots\cup(B\cap A_n)$$

y como los sucesos $B\cap A_i,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$, son también incompatibles entre sí, se puede escribir

$$P(B)=P(B\cap A_1)+P(B\cap A_2)+\ldots+P(B\cap A_n)$$

Teniendo en cuenta, por la probabilidad condicionada, que $P(B\cap A_i)=P(A_i)P(B/A_i)$, se concluye que:

$$\boxed{P(B)=P(A_1)P(B/A_1)+P(A_2)P(B/A_2)+\ldots+P(A_n)P(B/A_n)}$$

Igualdad que nos presenta la probabilidad del suceso B, recogiendo, a través de los A_i, todas las posibles circunstancias que se pudieran presentar condicionando al suceso. Tal igualdad se conoce con el nombre de *probabilidad total* del suceso.

6.0.1. Ejemplo

En cierta población, un 20 % de los trabajadores lo hace en la agricultura (A), un 25 % en la industria (I) y el resto en el sector servicios (S). Un 63 % de los que trabajan en el campo son mayores de 45 años, siendo ese porcentaje del 38 % y el 44 % en los otros sectores. Seleccionando un trabajador al azar, ¿qué probabilidad hay de que tenga menos de 45 años?

Solución:

Las probabilidades de A, I y S son: $P(A) = 0{,}2$; $P(I) = 0{,}25$; $P(S) = 0{,}55$. Llamemos $+45$ y -45 a los sucesos "tener más o menos de 45 años", respectivamente.
Como los porcentajes de trabajadores menores de 45 años en la agricultura, $-45/A$, industria, $-45/I$, y servicios, $-45/S$, son el 37 %, 62 % y 56 % respectivamente, se tiene que: $P(-45/A) = 0{,}37$; $P(-45/I) = 0{,}62$; $P(-45/S) = 0{,}56$. Con esto, la probabilidad de que la persona elegida tenga menos de 45 años es:

$$P(-45) = P(A)P(-45/A) + P(I)P(-45/I) + P(S)P(-45/S) =$$

$$= 0{,}2 \cdot 0{,}37 + 0{,}25 \cdot 0{,}62 + 0{,}55 \cdot 0{,}56 = 0{,}074 + 0{,}155 + 0{,}308 = 0{,}537$$

7. Teorema de Bayes

El cálculo de la probabilidad total de un suceso hace fijar la atención en los diversos medios que se manifiestan influyendo en él. Pero podemos invertir nuestro interés y, ante la presencia del suceso, investigar por la probabilidad de que se haya desarrollado en uno u otro escenario.
Se trata, suponiendo los sucesos A_i, $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$, formando un sistema completo de sucesos y B el suceso que se realiza, de hallar las probabilidades $P(A_i/B)$, $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$.
Tal probabilidad se puede calcular teniendo en cuenta que, por la fórmula de la probabilidad condicionada, se cumple:

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} \quad \text{y} \quad P(A_i \cap B) = P(A_i)P(B/A_i)$$

Luego,

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i)P(B/A_i)}{P(B)}$$

La probabilidad $P(B)$ se puede hallar mediante la probabilidad total, vista en la sección anterior:

$$P(B) = P(A_1)P(B/A_1) + P(A_2)P(B/A_2) + \ldots + P(A_n)P(B/A_n)$$

Entonces:

$$\boxed{P(A_i/B) = \frac{P(A_i)P(B/A_i)}{P(A_1)P(B/A_1) + P(A_2)P(B/A_2) + \ldots + P(A_n)P(B/A_n)}}$$

Esta expresión se conoce con el nombre de *fórmula de Bayes* y pone de manifiesto la relación entre las probabilidades $P(A_i)$, llamadas *a priori* por formularse antes de la presencia del suceso B, y las probabilidades $P(A_i/B)$, obtenidas *a posteriori*, pues su cálculo se realiza después de contar con una información adicional suministrada por aquel suceso.

7.0.1. Ejemplos

- En las condiciones del ejemplo anterior, si sabemos que un trabajador es menor de 45 años podemos preguntarnos: ¿qué probabilidad hay de que proceda de cada uno de los sectores agrícola, industrial y servicios? Es decir, hallar $P(A/-45)$, $P(I/-45)$ y $P(S/-45)$.

  Solución:

  Anteriormente se ha obtenido que $P(-45) = 0{,}537$, por tanto:

  ✓ $P(A/-45) = \dfrac{P(A)P(-45/A)}{P(-45)} = \dfrac{0{,}2 \cdot 0{,}37}{0{,}537} \approxeq 0{,}1378$

  ✓ $P(I/-45) = \dfrac{P(I)P(-45/I)}{P(-45)} = \dfrac{0{,}25 \cdot 0{,}62}{0{,}537} \approxeq 0{,}28864$

  ✓ $P(S/-45) = \dfrac{P(S)P(-45/S)}{P(-45)} = \dfrac{0{,}55 \cdot 0{,}56}{0{,}537} \approxeq 0{,}57356$

- Tres máquinas, M_1, M_2 y M_3, producen el 45 %, 30 % y 25 %, respectivamente, del total de las piezas producidas en una fábrica. Los porcentajes de producción defectuosa de estas máquinas son del 3 %, 4 % y 5 %.

  a) Seleccionamos una pieza al azar. Calcula la probabilidad de que sea defectuosa.
  b) Tomamos, al azar, una pieza y resulta ser defectuosa. Calcula la probabilidad de haber sido producida por la máquina M_2.
  c) ¿Qué máquina tiene la mayor probabilidad de haber producido la citada pieza defectuosa?

  Solución:

  Sea D el suceso "la pieza es defectuosa" y N el suceso "la pieza no es defectuosa". La información del problema puede expresarse en el diagrama de árbol de la figura siguiente, donde se ha llamado D el suceso "la pieza es defectuosa" y N al suceso "la pieza no es defectuosa":

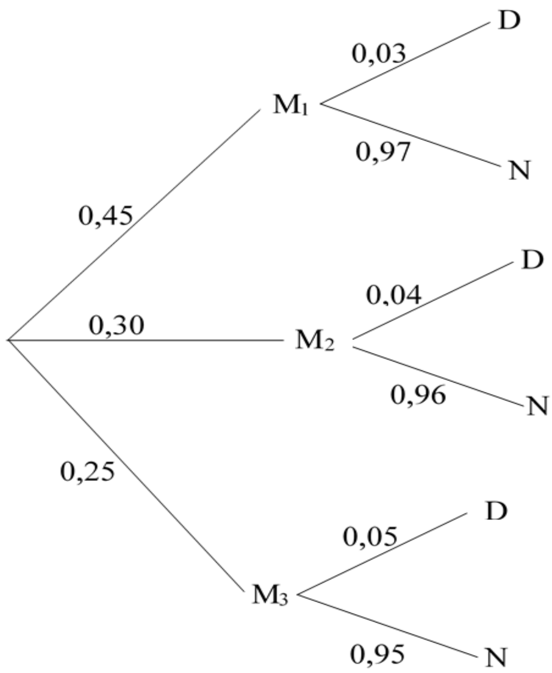


Figura 6: Diagrama de árbol de la producción de piezas

a) Para calcular la probabilidad de que la pieza elegida sea defectuosa, $P(D)$, por la probabilidad total:

$$P(D) = P(M_1)P(D/M_1) + P(M_2)P(D/M_2) + P(M_3)P(D/M_3) =$$

$$= 0{,}45 \cdot 0{,}03 + 0{,}30 \cdot 0{,}04 + 0{,}25 \cdot 0{,}05 = 0{,}038$$

b) Debemos calcular $P(M_2/D)$. Por el teorema de Bayes:

$$P(M_2/D) = \frac{P(M_2)P(D/M_2)}{P(M_1P(D/M_1) + P(M_2)P(D/M_2) + P(M_3)P(D/M_3)} =$$

$$= \frac{0{,}30 \cdot 0{,}04}{0{,}45 \cdot 0{,}03 + 0{,}30 \cdot 0{,}04 + 0{,}25 \cdot 0{,}05 = 0{,}038} = \frac{0{,}012}{0{,}038} \approxeq 0{,}3156$$

c) Calculamos $P(M_1/D)$ y $P(M_3/D)$, comparándolas con el valor de $P(M_2/D)$ ya calculado. Aplicando el teorema de Bayes, obtenemos:

$$P(M_1/D) = \frac{0{,}45 \cdot 0{,}03}{0{,}45 \cdot 0{,}03 + 0{,}30 \cdot 0{,}04 + 0{,}25 \cdot 0{,}05 = 0{,}038} = \frac{0{,}0135}{0{,}038} \approxeq 0{,}3553$$

$$P(M_3/D) = \frac{0{,}25 \cdot 0{,}05}{0{,}45 \cdot 0{,}03 + 0{,}30 \cdot 0{,}04 + 0{,}25 \cdot 0{,}05 = 0{,}038} = \frac{0{,}0125}{0{,}038} \approxeq 0{,}3289$$

La máquina con mayor probabilidad de haber producido la pieza defectuosa es M_1.