Composición de funciones. Función inversa de una función

Composición de funciones

Dadas dos funciones f y g se denomina **función compuesta** de f y g, y se designa por $g \circ f$, a la función que transforma $x \in \mathrm{Dom}\, f$ en $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Observa el siguiente esquema:

$$x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} g(f(x))$$

La expresión $(g \circ f)(x)$ se lee f *compuesta con* g. Se nombra en primer lugar a la función f que está a la derecha porque es la primera en actuar sobre x. Obsérvese que para que la función compuesta $g \circ f$ tenga sentido se debe de cumplir que $f(x) \in \mathrm{Dom}\, g$. Veamos un ejemplo.

Dadas las funciones $f(x) = \dfrac{1}{3x-6}$ y $g(x) = 2+\sqrt{x}$, vamos a hallar $f \circ g$.

- $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(2+\sqrt{x}\right) = \dfrac{1}{3\left(2+\sqrt{x}\right)-6} = \dfrac{1}{6+3\sqrt{x}-6} = \dfrac{1}{3\sqrt{x}}$
- $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = f\left(\dfrac{1}{3x-6}\right) = 2+\sqrt{\dfrac{1}{3x-6}}$

Observa que no se cumple en general que $f \circ g = g \circ f$, es decir, **la composición de funciones no es conmutativa**.

Función inversa o recíproca de una función

Se llama **función inversa** de una función f a otra función, que designaremos por f^{-1}, cumpliendo la siguiente condición:

$$a \in \mathrm{Dom}\, f \text{ y } f(a) = b \text{, entonces } f^{-1}(b) = a$$

Como consecuencia de la definición anterior se dan las relaciones siguientes:

$$x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{f^{-1}} f^{-1}(f(x)) = x \;\; ; \;\; x \xrightarrow{f^{-1}} f(x) \xrightarrow{f} f\left(f^{-1}(x)\right) = x$$

La función inversa de f^{-1} es, a su vez, f. Por eso se dice, simplemente, que las funciones f y f^{-1} son inversas o recíprocas.

Es necesario hacer una observación: para que una función *tenga* inversa ha de ser **inyectiva**, es decir, cada valor $y = f(x)$ ha de corresponder a *un único valor* de x, es decir, *no puede haber dos valores distintos del dominio de* f, x_1 y x_2, tales que $y = f(x_1) = f(x_2)$ pues, si así fuera, la función inversa cumpliría lo siguiente:

$$f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x_1)) = f^{-1}(f(x_2)) \Rightarrow f^{-1}(y) = x_1 = x_2$$

Lo cual es absurdo pues hemos supuesto que x_1 y x_2 son distintos.

El procedimiento práctico para hallar la inversa de $y = f(x)$ consiste en intercambiar las variables x e y, despejando posteriormente la variable y en esta última expresión. Veamos un ejemplo.

Para hallar la inversa de la función $g(x) = 2+\sqrt{x}$ del ejemplo anterior procedemos así. Llamamos $y = g(x)$: $y = 2+\sqrt{x}$. Intercambiamos las variables: $x = 2+\sqrt{y}$. Despejamos y: $\sqrt{y} = x-2 \Rightarrow y = (x-2)^2$. Por tanto, la función inversa de g es $g^{-1}(x) = (x-2)^2$. Comprobamos finalmente que así es:

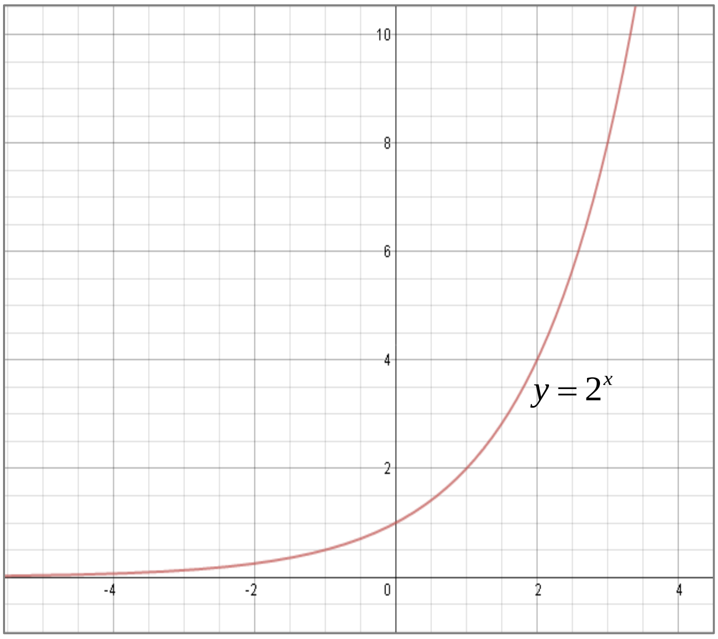
- $\left(g \circ g^{-1}\right)(x) = g\left(g^{-1}(x)\right) = g\left((x-2)^2\right) = 2+\sqrt{(x-2)^2} = 2+x-2 = x$
- $\left(g^{-1} \circ g\right)(x) = g^{-1}(g(x)) = g^{-1}\left(2+\sqrt{x}\right) = \left(2+\sqrt{x}-2\right)^2 = \sqrt{x}^2 = x$

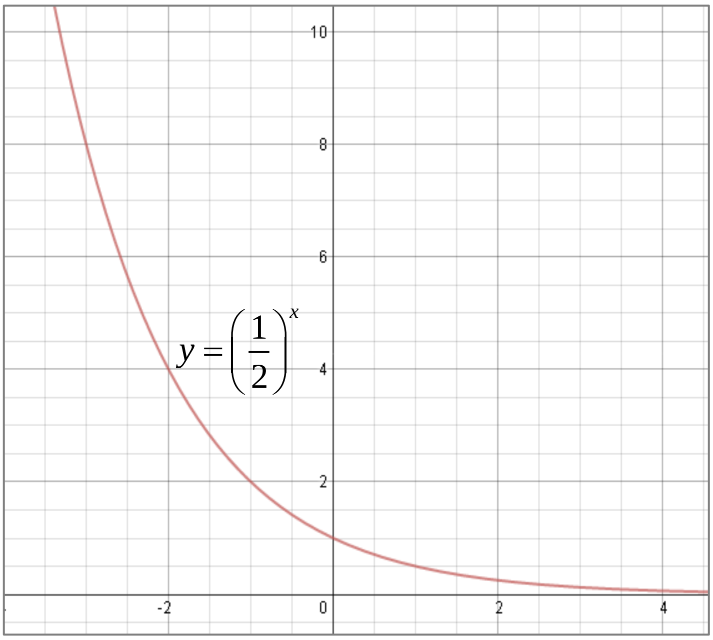
La función exponencial

Una **función exponencial** es de la forma $f(x)=a^x$, donde $a>0$ y $a\neq 1$. Las propiedades o características de la función exponencial son las siguientes:

1. Son continuas en todo el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales (que es su dominio de definición), y pasan por los puntos $(0\,,\,1)$ y $(1\,,\,a)$, ya que $a^0=1$ y $a^1=a$. De aquí se deduce que siempre cortan al eje Y en el punto $(0\,,\,1)$.
2. La imagen de la función exponencial es siempre el intervalo $(0\,,\,+\infty)$.
3. Si $a>1$ son crecientes, tanto más cuanto mayor sea a. El crecimiento de cualquiera de ellas llega a ser muy rápido, superando incluso a cualquier función potencial del tipo $y=kx^n$. Es por ello que la expresión *crecimiento exponencial* es sinónimo de crecimiento muy rápido. Además, si $a>1$, se dan las siguientes tendencias:
$$x\to-\infty\Rightarrow a^x\to 0\ \ ;\ \ x\to+\infty\Rightarrow a^x\to+\infty$$
4. Si $0<a<1$ son decrecientes. Además se dan las siguientes tendencias:
$$x\to-\infty\Rightarrow a^x\to+\infty\ \ ;\ \ x\to+\infty\Rightarrow a^x\to 0$$
5. Se abren siempre hacia arriba, es decir, son cóncavas.
6. Se acercan indefinidamente al eje X sin llegar a cortarlo; por la izquierda si $a>1$ y por la derecha si $0<a<1$. Es decir, el eje X es una asíntota horizontal.
7. En matemáticas superiores la función $y=e^x$ es extraordinariamente importante. Tanto es así que cuando se habla de “la función exponencial”, sin mencionar cuál es su base, se está haciendo referencia a ella.
8. También son exponenciales las funciones del tipo $y=a^{kx}$, ya que $a^{kx}=\left(a^k\right)^x$, es decir, $y=a^{kx}$ es la función exponencial de base a^k.

Como ejemplo representaremos a continuación las funciones $y=2^x$, $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$





Fenómenos que se describen mediante la función exponencial

La función exponencial se presenta en multitud de fenómenos de crecimiento animal, vegetal, económico, etcétera. En todos ellos, la variable independiente es el tiempo. Veamos algunos ejemplos:

- En un lugar aislado se introducen 1000 moscas de una cierta especie. La población ($n =$ número de moscas) varía a lo largo del tiempo t (expresado en días) según la siguiente función:

$$\boxed{n = 1000 \cdot 1,02^t}$$

- Un capital de 50000 € impuesto al 6 % anual se transforma en un capital C al cabo de t años del siguiente modo:

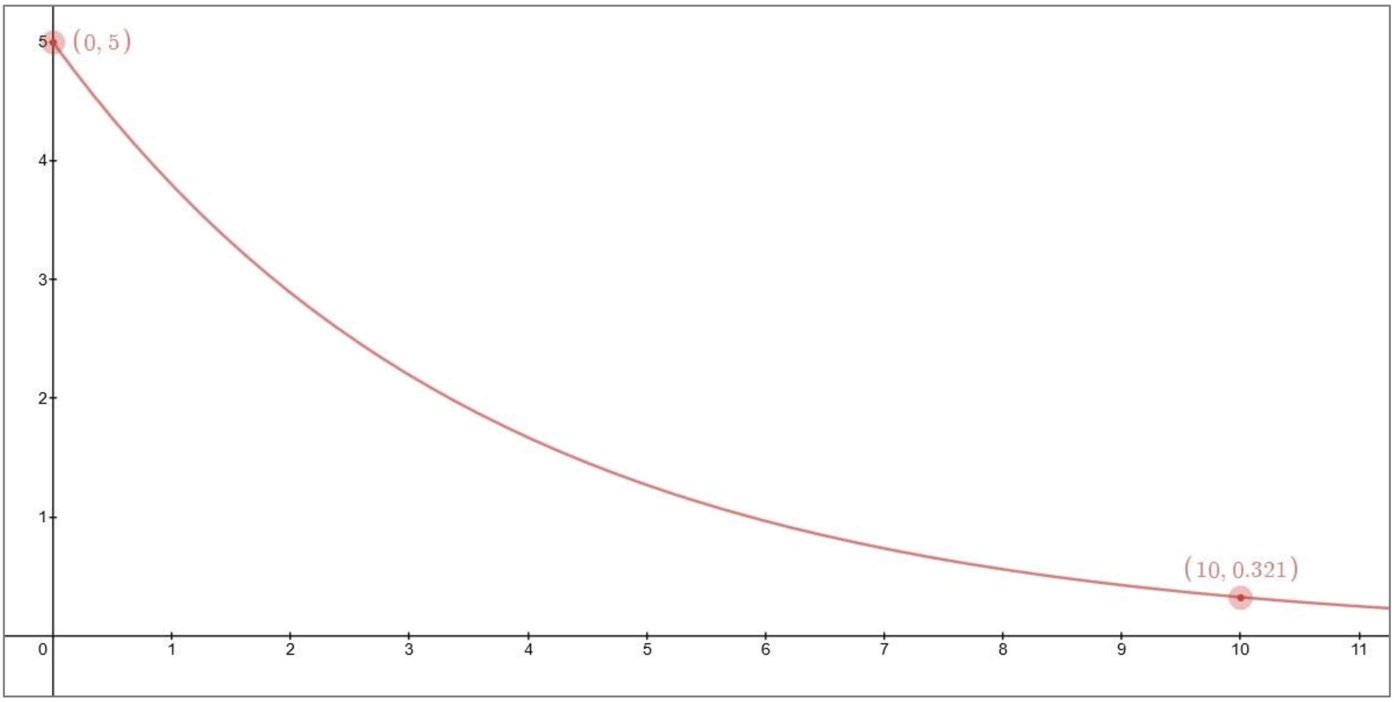
$$\boxed{C = 50\,000 \cdot 1,06^t}$$

La función exponencial también sirve para describir fenómenos de decrecimiento. Por ejemplo:

- Las sustancias radiactivas se desintegran con el paso del tiempo y la cantidad de sustancia radiactiva disminuye de forma exponencial. En unas, la desintegración es rapidísima, en otras, muy lenta. Por ejemplo, una cierta cantidad de masa de una sustancia se desintegra según la ecuación:

$$\boxed{M = m \cdot 0,76^t}$$

donde t es el tiempo (dado en miles de años), m es la cantidad inicial de sustancia radiactiva y M es la cantidad de sustancia radiactiva transcurrido un tiempo t (ver figura siguiente).



Obsérvese que 5 kg de esta sustancia radiactiva, pasados diez mil años se quedan en 0,321 kg.

- Si un capital de 80000 € depositados en divisas se devalúa un 3,5 % al año, su evolución con el tiempo se describe mediante la función:

$$\boxed{C = 80\,000 \cdot \left(\frac{100 - 3,5}{100}\right)^t = 80\,000 \cdot 0,965^t}$$

Se recomienda usar la aplicación desmos para representar gráficamente todos estos casos para hacerse una idea, como en el ejemplo de la sustancia radiactiva, como varia la variable independiente en función del tiempo.

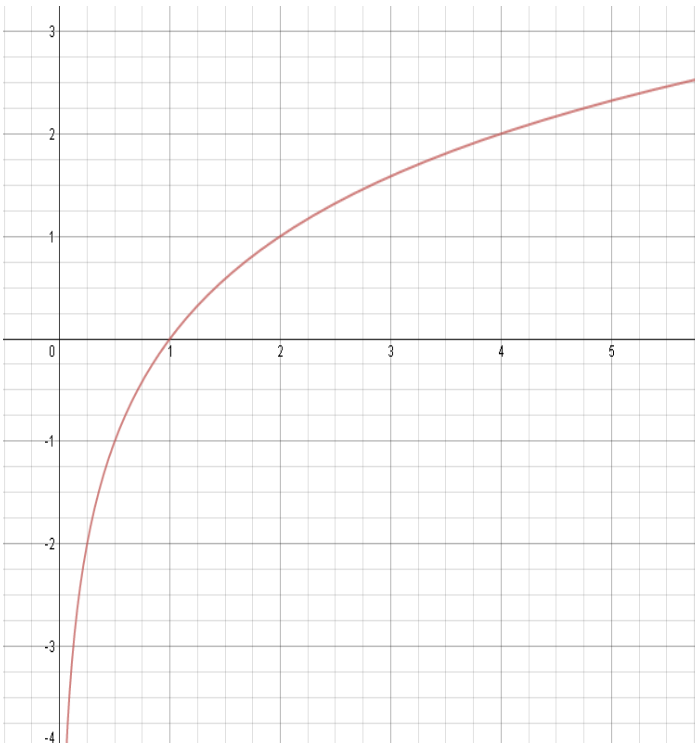
La función logarítmica

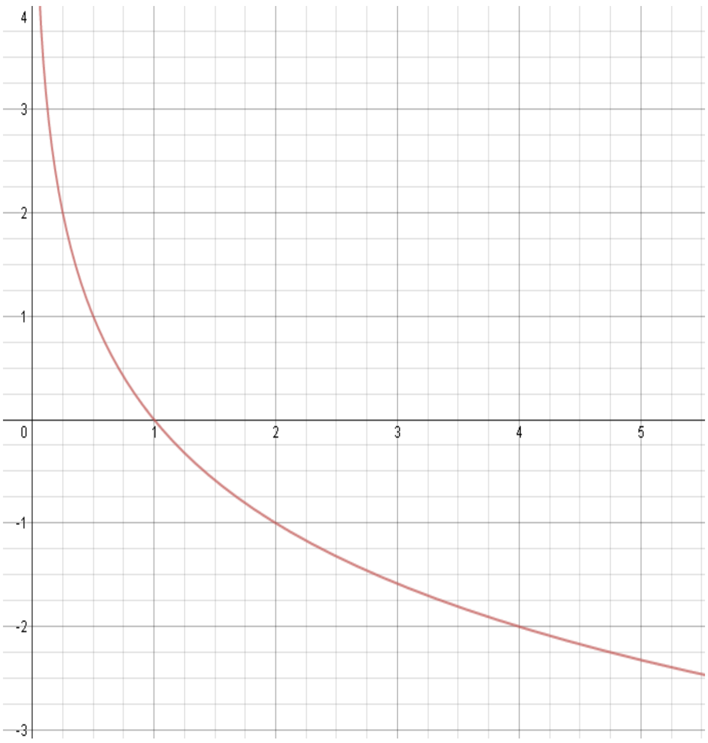
Una **función logarítmica** es de la forma $f(x)=\log_a x$, donde $a>0$ y $a\neq 1$. La función logarítmica de base a es la inversa de la función exponencial vista anteriormente, $g(x)=a^x$. Es fácil demostrar que, efectivamente, $(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)=x$.

Las propiedades o características de la función logarítmica son las siguientes:

1. Son continuas el intervalo $(0\ ,\ +\infty)$ (que es su dominio de definición), y pasan por los puntos $(1\ ,\ 0)$ y $(a\ ,\ 1)$, ya que $\log_a 1=0$ y $\log_a a=1$. De aquí se deduce que siempre cortan al eje X en el punto $(1\ ,\ 0)$.
2. La imagen de la función logarítmica es todo el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales.
3. Si $a>1$ son crecientes. Su crecimiento es muy lento, tanto más cuanto mayor sea a. Para valores muy grandes de x llegan a tomar valores mucho menores que los de cualquier función raíz $y=\sqrt[n]{x}$, por grande que sea n. Además, si $a>1$, se dan las siguientes tendencias:
$$x\to 0\Rightarrow \log_a x\to -\infty\ ;\ x\to +\infty\Rightarrow \log_a x\to +\infty$$
4. Si $0<a<1$ son decrecientes. Además se dan las siguientes tendencias:
$$x\to 0\Rightarrow \log_a x\to +\infty\ ;\ x\to +\infty\Rightarrow \log_a x\to -\infty$$
5. Si $a>1$ se abren hacia abajo, es decir, son convexas. Y si $0<a<1$ se abren hacia arriba, es decir, son cóncavas.
6. Se acercan indefinidamente al eje Y sin llegar a tocarlo; para valores de y negativos sin $a>1$, y para valores de y positivos si $0<a<1$. Es decir, el eje Y es una asíntota vertical.
7. En matemáticas superiores la función $f(x)=\log_e x$ es muy importante. Se le llama **logaritmo neperiano** y se designa por $f(x)=\ln x$. Es la función inversa de la exponencial de base e.

Como ejemplo representaremos a continuación las funciones $y=\log_2 x$ y $y=\log_{\frac{1}{2}} x$





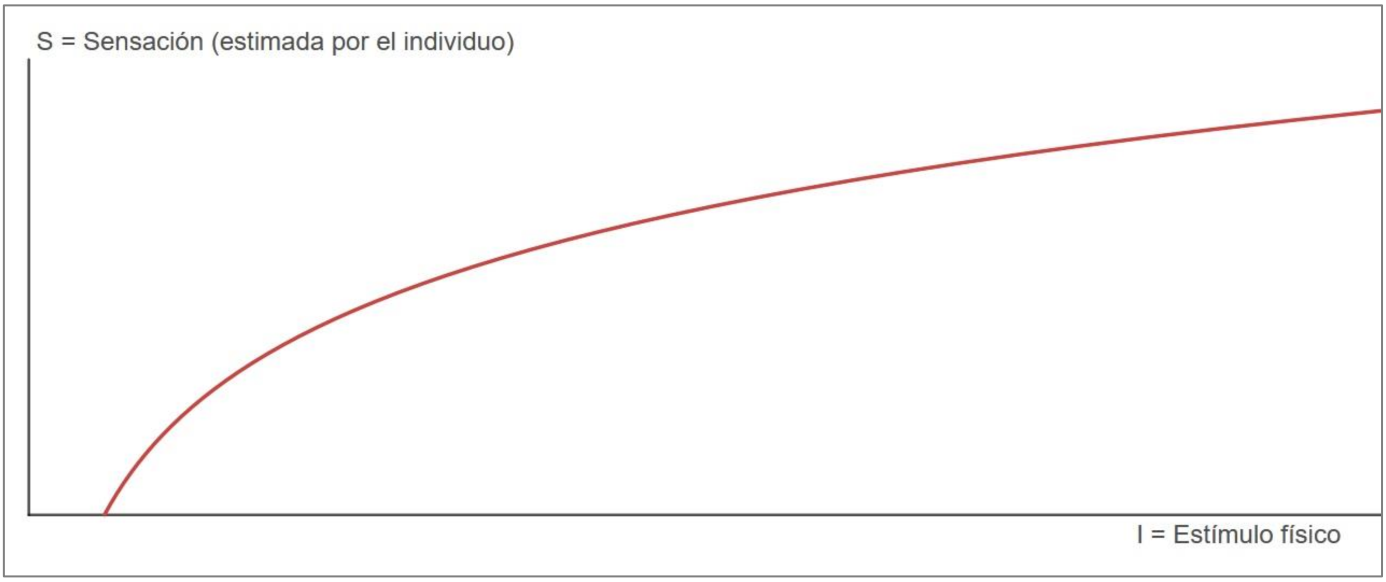
Fenómenos que se describen mediante la función logarítmica

Al igual que la función exponencial, la función logarítmica también se presenta en multitud de fenómenos tanto físicos como sociales o psicológicos, en los que la variable independiente puede ser el tiempo o cualquier otra, dependiendo de aquello que se estudie. Veamos algunos ejemplos.

- En psicología tiene gran importancia el estudio de percepciones. El individuo percibe colores, sonidos, olores, sabores... La percepción depende (*es función*) de los estímulos físicos. Por ejemplo, hablemos de la iluminación, I, que puede ser medida físicamente, y la percepción, S, dada por la llamada ley de psicofísica o ***ley de Weber-Fechner***:

$$\boxed{S = C\log I}$$

En esta ley C es una determinada constante. Para valores pequeños de I el individuo aprecia pequeños cambios. Pero cuanto mayor sea I mayores tienen que ser los cambios para que se aprecien, de tal manera que, en general "la intensidad de la sensación es proporcional al logaritmo de la intensidad del estímulo" (ver figura).



- La magnitud, M, de un movimiento sísmico se determina mediante la ***escala de Richter***, una escala logarítmica de base 10 que asocia a un terremoto el logaritmo decimal de su potencia, a la que llamaremos P:

$$\boxed{M = \log P}$$

Según esto, para hacernos una idea, podemos calcular la proporción entre las magnitudes de dos terremotos de escalas 5 y 4. Para cada uno de los dos terremotos tenemos que:

$$4 = \log P_1 \Rightarrow P_1 = 10^4$$

$$5 = \log P_2 \Rightarrow P_2 = 10^5$$

Dividiendo la segunda de las igualdades entre la primera tenemos que

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{10^5}{10^4} \Rightarrow \frac{P_2}{P_1} = 10 \Rightarrow P_2 = 10P_1$$

Esto viene a decir que un terremoto de magnitud 5 en la escala Richter es diez veces más intenso que un terremoto de magnitud 4 medido en la misma escala.