Operaciones con fracciones

Operación	Ejemplo
Suma $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}$	$\frac{2}{3}+\frac{4}{5}=\frac{2\cdot 5+3\cdot 4}{3\cdot 5}=\frac{10+12}{15}=\frac{22}{15}$ $\frac{7}{24}+\frac{11}{36}=\frac{3\cdot 7+2\cdot 11}{72}=\frac{21+22}{72}=\frac{43}{72}$ **¡OJO!** *Observa cómo en este ejemplo el denominador común no es el producto de los denominadores sino el* **MCM** *de* 24 *y* 36. *De esta manera las operaciones serán mucho más sencillas.*
Resta (diferencia) $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d}$	$\frac{8}{3}-\frac{6}{4}=\frac{8\cdot 4-6\cdot 3}{3\cdot 4}=\frac{32-18}{12}=\frac{14}{12}=\frac{7}{6}$ **¡OJO!** *El resultado siempre hay que simplificarlo. Para ello se divide el numerador y el denominador entre el* **MCD** *de ambos. En este caso hemos dividido entre* 2 *ya que* **MCD(14, 12) = 2**.
Producto (multiplicación) $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$	$\frac{4}{5}\cdot\frac{15}{8}=\frac{4\cdot 15}{5\cdot 8}=\frac{60}{40}=\frac{3}{2}$
Cociente (división) $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$, o bien $\frac{a/b}{c/d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$ **Observación**: *la fracción* d/c *se llama inversa de* c/d (*al multiplicarlas el resultado es* 1). *Pues bien,* ***para dividir dos fracciones, se multiplica la primera por la inversa de la segunda***.	$\frac{15}{7}:\frac{5}{2}=\frac{15\cdot 2}{7\cdot 5}=\frac{30}{35}=\frac{6}{7}$, o lo que es lo mismo, $\frac{15/7}{5/2}=\frac{\text{extremos}}{\text{medios}}=\frac{15\cdot 2}{7\cdot 5}=\frac{30}{35}=\frac{6}{7}$
Potencia (de exponente entero positivo o cero) $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\overset{(n\ veces)}{\cdots\cdots}\cdot\frac{a}{b}=\frac{a^n}{b^n}$; $\left(\frac{a}{b}\right)^0=1$	$\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2^4}{3^4}=\frac{16}{81}$
Potencia (de exponente entero negativo) $a^{-1}=\frac{1}{a}$; $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$; $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}=\frac{b}{a}$; $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^n=\frac{b^n}{a^n}$ **Observación**: *para efectuar una potencia de exponente negativo se cambia la base por su fracción inversa (en este caso* a/b *por* b/a) ***y el exponente negativo se cambia a positivo***. *Así pues, el resultado es la potencia de base la fracción inversa elevada al exponente pero negativo.*	$\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}=\left(\frac{3}{2}\right)^4=\frac{3^4}{2^4}=\frac{81}{16}$ **¡OBSERVA!** *El resultado obtenido* (81/16) *es la fracción inversa del resultado obtenido en el ejemplo anterior* (16/81), *que era la misma potencia, pero de exponente positivo.*

Es **importante** recordar que la **jerarquía entre las operaciones** es la siguiente: **primero**, corchetes y paréntesis; **segundo**, productos (incluidas las potencias) y divisiones, de izquierda a derecha; t**ercero**: sumas y restas, de izquierda a derecha.

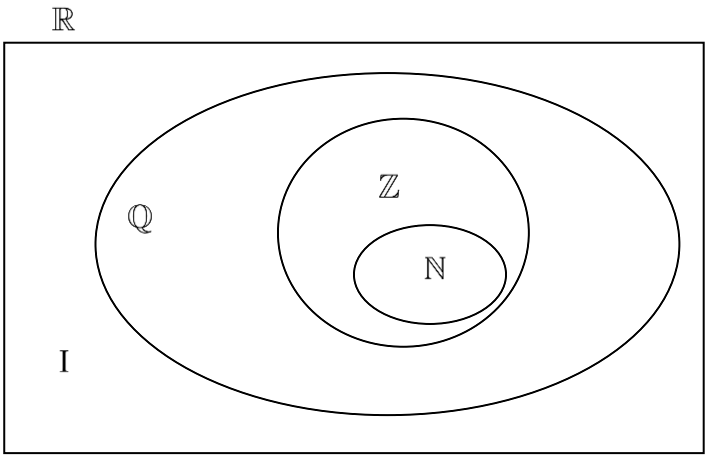
Así no cometeremos errores a la hora de efectuar operaciones más extensas. Por ejemplo:

$$\frac{\left[\left(\frac{2}{3}+\frac{4}{5}\right):\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right)\right]\cdot\left(\frac{-3}{2}+\frac{5}{3}\right)}{\frac{4}{3}-\frac{5}{2}}=\frac{\left[\left(\frac{10+12}{15}\right):\left(\frac{3-4}{6}\right)\right]\cdot\left(\frac{-9+10}{6}\right)}{\frac{8-15}{6}}=\frac{\left(\frac{22}{15}:\frac{-1}{6}\right)\cdot\frac{1}{6}}{\frac{-7}{6}}=\frac{\frac{132}{-15}\cdot\frac{1}{6}}{\frac{-7}{6}}=\frac{\frac{132}{-90}}{\frac{-7}{6}}=\frac{792}{630}=\frac{44}{35}$$

El conjunto de los números reales

Conjuntos numéricos	
El conjunto de los **números naturales**: $\mathbb{N}$	$\mathbb{N}=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ \ldots\ldots\}$
El conjunto de los **números enteros**: $\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}=\{\ldots\ldots\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots\ldots\}$
El conjunto de los **números racionales**: $\mathbb{Q}$ (fracciones)	$\mathbb{Q}=\left\{\dfrac{p}{q}\ :\ p\in\mathbb{Z},\ q\in\mathbb{N}\ \text{con}\ q\neq 0\right\}$
Propiedad: todo número racional es entero, decimal exacto o decimal periódico (puro o mixto). ***Importante:*** *debes recordar de cursos anteriores cómo se expresa un decimal exacto, periódico puro o periódico mixto en forma de fracción. Por ejemplo:* $1,65=\dfrac{165-1}{99}=\dfrac{164}{99}$; $5,639=\dfrac{5639-56}{990}=\dfrac{5583}{990}$	$\dfrac{-10}{5}=-2$ (entero); $\dfrac{13}{8}=1,625$ (decimal exacto); $\dfrac{-14}{9}=1,555\ldots=1,\overset{\frown}{5}$ (decimal periódico puro); $\dfrac{19}{12}=1,58333\ldots=1,5833$ (decimal periódico mixto)
El conjunto de los **números irracionales:** I. Está formado por todos aquellos números reales que no son racionales. Tienen infinitas cifras decimales, pero no forman período.	$1,234567891011121314151617181920 21\ldots\ldots$ $\sqrt{2}=1,4142136\ldots\ldots$ $\pi=3,141592654\ldots\ldots$

Representación de los números reales:



Obsérvese, según el diagrama, que:

$\mathbb{R}\supset\mathbb{Q}\supset\mathbb{Z}\supset\mathbb{N}$

$\mathrm{I}\cup\mathbb{Q}=\mathbb{R}$

Intervalos y semirrectas		
Intervalo abierto: $(a,b)=\{x\in\mathbb{R}\ :\ a<x<b\}$		Números que están comprendidos entre a y b.
Intervalo cerrado: $[a,b]=\{x\in\mathbb{R}\ :\ a\leq x\leq b\}$		Números que están comprendidos entre a y b, incluidos estos.
Intervalos semiabiertos	$(a,b]=\{x\in\mathbb{R}\ :\ a<x\leq b\}$	Números mayores que a y menores o iguales que b.
	$[a,b)=\{x\in\mathbb{R}\ :\ a\leq x<b\}$	Números mayores o iguales que a o menores que b.
Semirrectas	$(-\infty,a)=\{x\in\mathbb{R}\ :\ x<a\}$	Números menores que a.
	$(-\infty,a]=\{x\in\mathbb{R}\ :\ x\leq a\}$	Números menores o iguales que a (se incluye al propio a).
	$(a,+\infty)=\{x\in\mathbb{R}\ :\ x>a\}$	Números mayores que a.
	$[a,+\infty)=\{x\in\mathbb{R}\ :\ x\geq a\}$	Números mayores o iguales que a (se incluye el propio a).

Propiedades de las potencias. Igualdades notables

Propiedades de las potencias	
Producto de potencias de la misma base es igual a la base elevada a la suma de los exponentes: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$(2x^3y^2)\cdot(-3x^2z^3)\cdot(-4yz^2)=24x^3x^2y^2yz^3z^2=$ $=24x^5y^3z^5$
Cociente de potencias de la misma base es igual la base elevada a la diferencia de los exponentes: $\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$	$\dfrac{12a^3x^5}{28ax^3}=\dfrac{12}{28}\cdot\dfrac{a^3}{a}\cdot\dfrac{x^5}{x^3}=\dfrac{3}{7}a^2x^2$
Potencia de un producto es igual al producto de las potencias: $(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n$	✓ $(-2xyzp)^3=(-2)^3x^3y^3z^3p^3=-8x^3y^3z^3p^3$ ✓ $3^6\cdot(-2)^6\cdot 7^6=[3\cdot(-2)\cdot 7]^6=(-42)^6=42^6$
Potencia de un cociente es igual al cociente de las potencias: $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}$	$\left(\dfrac{-3ab}{2xy}\right)^3=\dfrac{(-3ab)^3}{(2xy)^3}=\dfrac{-3^3a^3b^3}{2^3x^3y^3}=\dfrac{-27a^3b^3}{8x^3y^3}$
Potencia de una potencia es igual a la base elevada al producto de los exponentes: $(a^n)^m=a^{n\cdot m}$	$\left(-\dfrac{2}{3}x^2z^4\right)^3=-\left(\dfrac{2}{3}\right)^3(x^2)^3(z^4)^3=-\dfrac{8}{27}x^6z^{12}$
Igualdades notables	
Cuadrado de una suma es igual al cuadrado del primero más dos veces el primero por el segundo, más el cuadrado del segundo: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ **¡OJO!** No confundir la igualdad anterior con esta otra, que es errónea: $(a+b)^2=a^2+b^2$	✓ $(2x+3)^2=(2x)^2+2\cdot(2x)\cdot 3+3^2=4x^2+12x+9$ ✓ $\left(\dfrac{5}{x}+2x\right)^2=\left(\dfrac{5}{x}\right)^2+2\cdot\dfrac{5}{x}\cdot 2x+(2x)^2=$ $=\dfrac{25}{x}+20+4x^2$
Cuadrado de una diferencia es igual al cuadrado del primero menos dos veces el primero por el segundo, más el cuadrado del segundo: $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ **¡OJO!** No confundir la igualdad anterior con esta otra, que es errónea: $(a-b)^2=a^2-b^2$	✓ $(5b-3)^2=(5b)^2-2\cdot(5b)\cdot 3+3^2=25b^2-30b+9$ ✓ $\left(6x-\dfrac{x^2}{2}\right)^2=(6x)^2-2\cdot 6x\cdot\dfrac{x^2}{2}+\left(\dfrac{x^2}{2}\right)^2=$ $=36x^2-6x^3+\dfrac{x^4}{4}$
Suma por diferencia es igual a diferencia de cuadrados: $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$	$(4x+2y)(4x-2y)=(4x)^2-(2y)^2=16x^2-4y^2$

¡Recuerda!

Cuando el signo de la base de una potencia es negativo, esta se escribe entre paréntesis. En estos casos se cumple:

- ✓ Si el exponente es **par**, el resultado es positivo.
- ✓ Si el exponente es **impar**, el resultado es negativo.

Ejemplos: $(-2)^4=2^4=16$, $(-2)^5=-2^5=-32$, $(-7)^2=7^2=49$, $(-10)^4=10^4=10000$.

Radicales

$\sqrt[n]{a}=b \Leftrightarrow a=b^n$ $\sqrt[n]{a}$ es el **radical**, a es el **radicando** y n es el **índice** de la raíz	Si $a\geq 0$, $\sqrt[n]{a}$ existe cualquiera que sea a. Si $a<0$, $\sqrt[n]{a}$ sólo existe para valores impares de n.
Forma exponencial: $\sqrt[n]{a}=a^{1/n}$; $\sqrt[n]{a^m}=a^{m/n}$	$\sqrt[3]{2}=2^{\frac{1}{3}}$, ya que $\left(2^{1/3}\right)^3=2^{\frac{3}{3}}=2$
Propiedades de los radicales	
Radicales equivalentes: $\sqrt[n\,p]{a^p}=\sqrt[n]{a}$ Esta propiedad sirve para simplificar radicales y reducir radicales a índice común.	✓ $\sqrt[8]{81}=\sqrt[8]{3^4}=\sqrt[2\cdot 4]{3^4}=\sqrt{3}$ ✓ Reducir a índice común $\sqrt{2}$ y $\sqrt[3]{2}$: $\sqrt{2}=\sqrt[2\cdot 3]{2^3}=\sqrt[6]{8}$; $\sqrt[3]{2}=\sqrt[3\cdot 2]{2^2}=\sqrt[6]{4}$
Potencia de un radical: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^p=\sqrt[n]{a^p}$ Potencia de una raíz es igual a raíz de una potencia.	$\left(\sqrt[6]{2}\right)^4=\sqrt[6]{2^4}=\sqrt[3]{2}$
Raíz de una raíz: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[m\cdot n]{a}$ Raíz de una raíz es igual a la raíz de índice el producto de los índices.	$\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[4]{9}}}=\sqrt[24]{9}=\sqrt[24]{3^2}=\sqrt[12]{3}$
Raíz de un producto: $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$ Raíz de un producto es igual al producto de las raíces.	$\sqrt[3]{6}\sqrt[3]{9}=\sqrt[3]{54}=\sqrt[3]{3^3 2}=\sqrt[3]{3^3}\sqrt[3]{2}=3\sqrt[3]{2}$ (observa cómo en este ejemplo la propiedad se ha utilizado dos veces).
Raíz de un cociente: $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	$\frac{\sqrt[3]{12}\sqrt{9}}{\sqrt[6]{6}}=\frac{\sqrt[6]{(12)^2}\sqrt[6]{9^3}}{\sqrt[6]{6}}=\sqrt[6]{\frac{(2^2 3)^2\cdot(3^2)^3}{2\cdot 3}}=$ $=\sqrt[6]{\frac{2^2\cdot 3^2\cdot 3^6}{2\cdot 3}}=\sqrt[6]{2\cdot 3^7}=\sqrt[6]{4374}$ (observa cómo se han utilizado en este ejemplo varias de las propiedades anteriores para simplificar).
Suma de radicales: dos expresiones con radicales se dicen ***semejantes*** si la raíz que aparece en ambas tiene el mismo índice y el mismo radicando (por ejemplo, $5\sqrt{2}$ y $-3\sqrt{2}$ son radicales semejantes). Solamente se pueden sumar (o restar) expresiones con radicales que sean semejantes.	$\sqrt{12}+2\sqrt{27}-\sqrt{75}=\sqrt{2^2\cdot 3}+2\sqrt{3^3}-\sqrt{5^2\cdot 3}=$ $=2\sqrt{3}+6\sqrt{3}-5\sqrt{3}=(2+6-5)\sqrt{3}=3\sqrt{3}$
Racionalización de denominadores	
Con una raíz cuadrada en el denominador: se multiplica arriba y abajo (numerador y denominador) por la misma raíz.	$\frac{3}{5\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{5\sqrt{3}\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{5\cdot 3}=\frac{\sqrt{3}}{5}$
Con una raíz n-ésima en el denominador: se multiplica arriba y abajo por otra raíz n-ésima tal que se complete el radicando con una potencia n-ésima.	$\frac{2}{\sqrt[3]{2}}=\frac{2\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{2^2}}=\frac{2\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2^3}}=\frac{2\sqrt[3]{4}}{2}=\sqrt[3]{4}$
Con una suma o diferencia de raíces cuadradas en el denominador: se multiplica arriba y abajo por la expresión conjugada del denominador.	$\frac{3}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}=\frac{3(\sqrt{6}+\sqrt{3})}{(\sqrt{6}-\sqrt{3})(\sqrt{6}+\sqrt{3})}=$ $=\frac{3(\sqrt{6}+\sqrt{3})}{\left(\sqrt{6}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{3(\sqrt{6}+\sqrt{3})}{6-3}=\sqrt{6}+\sqrt{3}$

Valor absoluto

Definición	
$\lvert a\rvert=\begin{cases} a & \text{si} \quad a\geq 0 \\ -a & \text{si} \quad a<0\end{cases}$	• $\lvert 6,3\rvert=6,3$ • $\lvert -4,35\rvert=-(-4,35)=4,35$ • $\lvert 2-\sqrt{7}\rvert=-(2-\sqrt{7})=\sqrt{7}-2$, ya que $2-\sqrt{7}$ es negativo.
Interpretación geométrica del valor absoluto	
El valor absoluto de un número real a es la distancia de ese número a al número 0, origen de la recta real.	La distancia de -8 al 0, origen de la recta real, es 8 ya que $\lvert -8\rvert=-(-8)=8$.

	Propiedades del valor absoluto	Observaciones y ejemplos
1	$\lvert a\rvert\geq 0$ La distancia de un número al origen es siempre cero (cuando ese número es cero) o positiva.	Esto es consecuencia de la propia definición: • Si $a\geq 0$, entonces $\lvert a\rvert=a\geq 0$. • Si $a<0$, entonces $\lvert a\rvert=-a>0$ (ya que $a<0$).
2	$\lvert a\rvert=0\Leftrightarrow a=0$ Decir que la distancia de un número al origen es cero es equivalente a decir que ese número es el propio 0.	Esta propiedad es evidente en sí misma. Lo que viene a decir es que el único número real cuyo valor absoluto es cero es el propio número 0.
3	$a\leq\lvert a\rvert$ La distancia de un número al origen es siempre mayor o igual que ese número.	• $3\leq\lvert 3\rvert=3$ (si el número es positivo se da la igualdad). • $-3\leq\lvert -3\rvert=3$ (si el número es negativo se da la desigualdad estricta).
4	$\lvert a\rvert=\lvert -a\rvert$ La distancia de un número al origen es igual que la distancia del opuesto de ese número al origen.	• $\lvert 5\rvert=\lvert -5\rvert$, ya que $\lvert 5\rvert=5$ y $\lvert -5\rvert=5$.
5	$\lvert ab\rvert=\lvert a\rvert\lvert b\rvert$; $\left\lvert\frac{a}{b}\right\rvert=\frac{\lvert a\rvert}{\lvert b\rvert}$ La distancia del producto (o cociente) de dos números al origen es igual que el producto (o cociente) de las distancias de esos dos números al origen.	• $\lvert 3\cdot(-5)\rvert=\lvert 3\rvert\cdot\lvert -5\rvert$, ya que $\lvert -15\rvert=15=3\cdot 5$. • $\left\lvert\frac{-7}{2}\right\rvert=\frac{\lvert -7\rvert}{\lvert 2\rvert}$, ya que $\left\lvert\frac{-7}{2}\right\rvert=\left\lvert -\frac{7}{2}\right\rvert=\left\lvert\frac{7}{2}\right\rvert=\frac{7}{2}=\frac{\lvert -7\rvert}{\lvert 2\rvert}$.
6	$\lvert a-b\rvert=\lvert b-a\rvert$ Al número $\lvert a-b\rvert$, que es igual que $\lvert b-a\rvert$ según esta propiedad, se le llama ***distancia*** entre a y b.	Esta propiedad es fácil de demostrar. Por la propiedad 4 tenemos que: $\lvert a-b\rvert=\lvert -(a-b)\rvert=\lvert b-a\rvert$
7	$\lvert a\rvert\leq b\Leftrightarrow -b\leq a\leq b$; $\lvert a\rvert<b\Leftrightarrow -b<a<b$ $\lvert a\rvert\geq b\Leftrightarrow a\leq -b$ o $a\geq b$; $\lvert a\rvert>b\Leftrightarrow a<-b$ o $a>b$	Son muy útiles para resolver ciertas inecuaciones: • $\lvert x-4\rvert\leq 2\Leftrightarrow -2\leq x-4\leq 2\Leftrightarrow 2\leq x\leq 6$. • $\lvert x+3\rvert>5\Leftrightarrow x+3<-5$ o $x+3>5\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x<-8$ o $x>2$
8	*Desigualdad triangular*: $\lvert a+b\rvert\leq\lvert a\rvert+\lvert b\rvert$	• $\lvert 5+(-7)\rvert=\lvert -2\rvert=2\leq\lvert 5\rvert+\lvert -7\rvert=5+7=12$.
9	$\lvert a\rvert-\lvert b\rvert\leq\lvert a-b\rvert$	• $\lvert 5\rvert-\lvert -7\rvert=5-7=-2\leq\lvert 5-(-7)\rvert=\lvert 12\rvert=12$.

Notación científica

Definición	
Un número está expresado en **notación científica** si se escribe como el producto de un número mayor o igual que 1 y menor estrictamente que 10, y una potencia de 10. Si un número está expresado en notación científica al exponente entero al que está elevado la potencia de 10 se le llama **orden de magnitud**.	$0,00000034=\dfrac{34}{100\,000\,000}=34\cdot10^{-8}=3,4\cdot10^{-7}$ $26\,531\,000\,000=2,6531\cdot10^{10}$ $947855,36=9,4785536\cdot10^{5}$
Suma y resta en notación científica	
Para sumar y restar números expresados en notación científica **es necesario que todos estén expresados con el mismo orden de magnitud**. Es habitual escribirlos en el mayor de los órdenes de magnitud que aparezca en dichas sumas o restas.	$5,3\cdot10^{12}-3\cdot10^{11}=5,3\cdot10^{12}-0,3\cdot10^{12}=$ $=(5,3-0,3)\cdot10^{12}=5\cdot10^{12}$ $3\cdot10^{-5}+8,2\cdot10^{-6}=3\cdot10^{-5}+0,82\cdot10^{-5}=$ $=(3+0,82)\cdot10^{-5}=3,82\cdot10^{-5}$
Producto y división en notación científica	
Para multiplicar y dividir números expresados en notación científica se opera con las potencias de 10 por un lado (aplicando las propiedades de las potencias), y el resto de la expresión por el otro.	$(3,5\cdot10^{7})\cdot(4\cdot10^{8})=(3,5\cdot4)\cdot(10^{7}\cdot10^{8})=$ $=14\cdot10^{15}=1,4\cdot10^{16}$ $(1,2\cdot10^{7}):(5\cdot10^{-6})=(1,2:5)\cdot(10^{7}:10^{-6})=$ $=0,24\cdot10^{13}=2,4\cdot10^{12}$
Cifras significativas	
Recibe el nombre de cifra significativa todo dígito (exceptuando el cero cuando se utiliza para situar el punto decimal) cuyo valor se conoce con seguridad. El número $2,503$ tiene cuatro cifras significativas. El número $0,00103$ tiene tres cifras significativas; los tres primeros ceros no son cifras significativas ya que simplemente sitúan el punto decimal. En notación científica este último número se escribe $1,03\cdot10^{-3}$.	Por ejemplo, expresemos el resultado de la operación $\dfrac{(7,2\cdot10^{-6})^{3}}{5,3\cdot10^{-9}}$ en notación científica con tres cifras significativas: $\dfrac{(7,2\cdot10^{-6})^{3}}{5,3\cdot10^{-9}}=\dfrac{(7,2)^{3}\cdot(10^{-6})^{3}}{5,3\cdot10^{-9}}=\dfrac{373,248\cdot10^{-18}}{5,3\cdot10^{-9}}=$ $=\dfrac{373,248}{5,3}\cdot\dfrac{10^{-18}}{10^{-9}}=70,4\cdot10^{-9}=7,04\cdot10^{-8}$

Uso de la calculadora científica

La tecla **EXP** o bien la tecla **x10^{x}**, ayuda a expresar números en notación científica. Además, la calculadora posee un modo de actuación (**MODE SCI**) específico para esta notación. El modo **SCI** hace que la calculadora trabaje siempre en notación científica y, además, con la cantidad de cifras significativas que previamente le hayamos indicado. Dependiendo de la calculadora que tengas se accederá al modo **SCI** de una forma o de otra. Aprende a hacerlo con la tuya. Una vez lo sepas, introduce el número de cifras significativas, por ejemplo 4. En este caso si realizas la operación: $(43789232)\cdot(3,23\cdot10^{-5})$, una vez que pulses el igual el resultado será $1,414\cdot10^{3}$.

Como puedes observar, este resultado tiene 4 cifras significativas: $1,414$.

Aproximaciones y errores

Orden de aproximación	
Se dice que de un número real tomamos una aproximación de orden n cuando se trata de un número racional con n cifras decimales.	$\frac{3\sqrt{5}}{4}=1,7$ (aproximación de orden 1). $\frac{3\sqrt{5}}{4}=1,677$ (aproximación de orden 3).
Métodos de aproximación	
Por defecto o truncamiento: se eliminan las cifras decimales a partir del orden considerado. **Por exceso**: se eliminan las cifras decimales hasta el orden considerado y se añade una cifra. **Redondeo**: se eliminan todas las cifras decimales a partir del orden indicado y, si la cifra siguiente al orden considerado es mayor o igual que 5, se añade una unidad a la última cifra.	Aproximar $5,245848$ hasta el orden 3 (milésimas). O lo que es lo mismo, aproximar $5,245848$ con cuatro cifras significativas. Por defecto truncamiento: $5,245$. Por exceso: $5,246$. Redondeo: $5,246$.
Error absoluto. Cota del error absoluto	
El **error absoluto** (E_a) de una medida aproximada es el valor absoluto de la diferencia entre el valor real (V_r) y el valor aproximado (V_a): $$E_a=\lvert V_r-V_a\rvert$$ El valor real o exacto es, en la mayoría de los casos, desconocido. Por tanto, también se desconoce el error absoluto. Lo importante es poder acotarlo, diciendo que **el error absoluto es menor que**… Una **cota del error absoluto** se obtiene a partir de la última cifra significativa utilizada, tomando la mitad de ésta.	El error absoluto que se comete al redondear $5,245848$ a las milésimas es: $$E_a=\lvert V_r-V_a\rvert=\lvert 5,245848-5,246\rvert=0,000152$$ Si una piscina tiene una capacidad de $719\ \mathrm{m}^3$, la última cifra significativa (el 9) designa unidades de m^3. El error absoluto es pues menor que medio metro cúbico (cota del error absoluto): $$E_a<0,5\ \mathrm{m}^3$$
Error relativo. Cota del error relativo	
El error relativo (E_r) es el cociente entre el valor absoluto y el valor real: $$E_r=\left\lvert\frac{E_a}{V_r}\right\rvert$$ El error relativo es tanto menor cuantas más cifras significativas se usan.	Veamos un par de ejemplos basados en los dos ejemplos anteriores. El error relativo que se comente al redondear $5,245848$ a las milésimas es: $$E_r=\left\lvert\frac{E_a}{V_r}\right\rvert=\left\lvert\frac{0,000152}{5,245848}\right\rvert=0,000028975$$ Al tomar como capacidad de la piscina $719\ \mathrm{m}^3$, el error relativo que se comete es menor que: $$E_r<\frac{0,5}{719}=0,0007$$

Logaritmos

<table>
<tr><th colspan="3">Definición</th></tr>
<tr><td colspan="2">Si $a>0$ y $a\neq 1$, se llama logaritmo en base a de b al exponente al que hay que elevar la base a para obtener b
$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$</td><td>• $\log_2 8 = 3$ porque $2^3 = 8$.
• $\log_3 81 = 4$ porque $3^4 = 81$.
• $\log_2 \frac{1}{8} = -3$ porque $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$.</td></tr>
<tr><th colspan="3">Una observación de interés</th></tr>
<tr><td colspan="2">Los números que son potencias exactas de la base tienen logaritmos enteros (ejemplos anteriores). Si no es así el logaritmo es un número decimal.</td><td>• $\log_2 24$ es un número decimal situado entre 4 y 5 porque $2^4 = 16$ y $2^5 = 32$.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Propiedades de los logaritmos</th><th>Observaciones y ejemplos</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Números distintos tienen logaritmos distintos. O sea:
$$b \neq c \Rightarrow \log_a b \neq \log_a c$$
Además:
• Si $a>1$ y $b<c$, entonces $\log_a b < \log_a c$.
• Si $0<a<1$ y $b<c$, entonces $\log_a b > \log_a c$.</td><td>De lo anterior se deduce que el logaritmo de base mayor que 1 es creciente (a números mayores logaritmos mayores), y que el logaritmo de base un número comprendido entre 0 y 1 es decreciente (a números mayores logaritmos menores).</td></tr>
<tr><td>2</td><td>El logaritmo de en base a de a es igual a 1:
$$\log_a a = 1$$</td><td>Esta propiedad es evidente ya que $a^1 = a$.</td></tr>
<tr><td>3</td><td>El logaritmo de 1 es 0, sea quien sea la base:
$$\log_a 1 = 0$$</td><td>Esta propiedad también es clara pues $a^0 = 1$.</td></tr>
<tr><td>4</td><td>El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos:
$$\log_a (b\cdot c) = \log_a b + \log_a c$$</td><td rowspan="4">Si $\log_2 r = 4,3$ y $\log_2 s = -1,7$, calcular
$\log_2\left(\frac{r\cdot s}{4}\right)$ y $\log_2 \frac{2\sqrt{r}}{s^3}$.
• $\log_2\left(\frac{r\cdot s}{4}\right) = \log_2 (r\cdot s) - \log_2 4 =$
$= \log_2 r + \log_2 s - \log_2 4 = 4,3 + (-1,7) - 2 = 0,6$
• $\log_2 \frac{2\sqrt{r}}{s^3} = \log_2 2 + \log_2 \sqrt{r} - \log_2 s^3 =$
$= 1 + \log_2 r^{1/2} . \log_2 s^3 = 1 + \frac{1}{2}\log_2 r - 3\log_2 s =$
$= 1 + \frac{1}{2}\cdot 4,3 - 3\cdot(-1,7) = 1 + 2,15 + 5,1 = 8,25$</td></tr>
<tr><td>5</td><td>El logaritmo de un cociente es igual a la diferencia de los logaritmos:
$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$$</td></tr>
<tr><td>6</td><td>El logaritmo de una potencia es igual al exponente por el logaritmo de la base:
$$\log_a b^n = n\cdot \log_a b$$</td></tr>
<tr><td>7</td><td>El logaritmo de una raíz es igual al logaritmo del radicando dividido por el índice:
$$\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{\log_a b}{n}$$</td></tr>
<tr><td>8</td><td>Cambio de base. El logaritmo en base a de un número se puede obtener a partir de logaritmos en otra base:
$$\log_a b = \frac{\log_k b}{\log_k a}$$</td><td></td></tr>
</table>

Logaritmos decimales

Los logaritmos en base 10 se llaman logaritmos decimales y, en lugar de designarse mediante $\log_{10}$ se designan simplemente con $\log$. Es decir:

$$\log_{10} x = \log x$$

La tecla **log** de la calculadora sirve para calcular logaritmos decimales. Por la propiedad 8 anterior, se pueden obtener, con la ayuda de la calculadora, el logaritmo de un número en cualquier base. Por ejemplo:

$$\log_3 45 = \frac{\log 45}{\log 3} = 3,464973521$$

El número *e*

El número e es muy especial en matemáticas. Se define como el número al que tiende la función $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ cuando x tiende a $+\infty$. De esta función podemos hallar sucesivamente $f(1)$, $f(2)$,..., $f(100)$,..., $f(1000)$,...

Por ejemplo: $f(1000) = \left(1+\frac{1}{1000}\right)^{1000} = 2,716923932$, $f(1000000) = \left(1+\frac{1}{1000000}\right)^{1000000} = 2,718280469$.

Es posible demostrar (aunque esto requiere de matemáticas superiores), que cuando $x \to +\infty$, entonces $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ tiende a un número irracional al que llamaremos número e. Simbólicamente:

$$x \to \infty \Rightarrow f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \to e = 2,718281828\ldots$$

Logaritmos neperianos

Se llaman así a los logaritmos cuya base es el número e, y se designan mediante la abreviatura $\ln$. De este modo el logaritmo neperiano de un número x es:

$$\ln x = \log_e x$$

Su nombre proviene de John Napier, un matemático escocés, reconocido por ser el primero en definir los logaritmos.

La tecla **ln** de la calculadora sirve para calcular logaritmos neperianos. Estos logaritmos, además de su interés histórico, son enormemente importantes en matemáticas superiores.

Ejemplos

1. Solamente utilizando la definición de logaritmo podemos calcular $\log_2 64 + \log_2 \frac{1}{4} - \log_3 9 - \log_2 \sqrt{2}$. Observa:

$$\log_2 64 + \log_2 \frac{1}{4} - \log_3 9 - \log_2 \sqrt{2} = \log_2 2^6 + \log_2 2^{-2} - \log_3 3^2 - \log_2 2^{1/2} =$$

$$= 6\log_2 2 + (-2)\log_2 2 - 2\log_3 3 - \frac{1}{2}\log_2 2 = 6 - 2 - 2 - \frac{1}{2} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

2. Utilizando la definición de logaritmo también podemos resolver ecuaciones donde la incógnita es la base del logaritmo. Por ejemplo $\log_x 125 = 3 \Leftrightarrow x^3 = 125 \Leftrightarrow x^3 = 5^3 \Leftrightarrow x = 3$.
3. Podemos expresar como un solo logaritmo ciertas expresiones, por ejemplo $\log b + 2\log c - \log d$. Basta aplicar las propiedades a la inversa: $\log b + 2\log c - \log d = \log b + \log c^2 - \log d = \log\left(b \cdot c^2\right) - \log d = \log \frac{b \cdot c^2}{d}$.
4. Con la calculadora y utilizando el cambio de base se pueden hallar logaritmos de base cualquier número.

$$\log_7 938 = \frac{\log 938}{\log 7} \simeq 3,517 \qquad ; \qquad \log_{3/2} 127 = \frac{\ln 127}{\ln(3/2)} \simeq 11,947$$