# Logaritmos: contexto histórico y aplicaciones (III)

Podríamos redescubrir las propiedades del logaritmo a partir del análisis de la tabla utilizada anteriormente (véase artículo anterior). ¿De qué manera? Recordemos que "el logaritmo de un número es el exponente al cual se debe elevar la base del logaritmo para obtener dicho número (llamado argumento)".

Retomando la primera de las multiplicaciones del artículo anterior tenemos:

$$16 \cdot 512 = 2^4 \cdot 2^9 = 2^{13} = 8192$$

Según lo anterior, $4$ es el exponente al que hay que elevar $2$ para obtener $16$. En otras palabras, $4$ es el logaritmo en base $2$ de $16$, lo que simbólicamente escribimos $\log_2 16 = 4$. Del mismo modo $\log_2 512 = 9$ y $\log_2 8192 = 13$.

Observemos que $4 + 9 = 13$, que podría escribirse así:

$$\log_2 16 + \log_2 512 = \log_2 8192 = \log_2 (16 \cdot 512)$$

Del mismo modo, mirando las columnas de la tabla:

$$\log_3 81 + \log_3 19683 = \log_3 1594323 = \log_3 (81 \cdot 19683)$$

$$\log_4 256 + \log_4 262144 = \log_4 67108864 = \log_4 (256 \cdot 262144)$$

$$\log_5 625 + \log_5 1953125 = \log_5 1220703125 = \log_5 (625 \cdot 1953125)$$

Podríamos continuar con cálculos similares, y luego de un número significativo de ejemplos, convencernos como para "generalizar" este resultado diciendo que *el logaritmo de un producto, en una base dada, es la suma de los logaritmos -en la misma base- de cada uno de los factores*. En lenguaje simbólico escribiríamos:

$$\log_b (x \cdot y) = \log_b x + \log_b y$$

Algo similar ocurre con el logaritmo de un cociente. Recordemos que en un ejemplo anterior, dividimos:

$$\frac{67108864}{263144} = \frac{4^{13}}{4^9} = 4^4 = 256$$

Llevando a cabo un análisis análogo al realizado para el producto, y teniendo en cuenta la definición de logaritmo, tendremos que:

$$13 - 9 = 4 \Rightarrow \log_4 67108864 - \log_4 262144 = \log_4 256 = \log_4 \left( \frac{67108864}{262144} \right)$$

O también en la división:

$$\frac{1220703125}{1953125} = \frac{5^{13}}{5^9} = 5^4 = 625$$

Notamos que:

$$13 - 9 = 4 \Rightarrow \log_5 1220703125 - \log_5 1953125 = \log_5 625 = \log_5 \left( \frac{1220703125}{1953125} \right)$$

De manera análoga al análisis que se ha realizado con el producto, y con un buen número de ejemplos demostrativos, podríamos concluir y generalizar que *el logaritmo de un cociente, en una base dada, es la* *diferencia entre los logaritmos del dividendo y del divisor, en la misma base*. En lenguaje simbólico escribiríamos:

$$\log_b \left(\frac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$$

Finalmente, podríamos deducir la propiedad del logaritmo respecto de la potencia, si analizamos también uno de los ejemplos citados. Vimos que:

$$4^7 = \left(2^2\right)^7 = 2^{14} = 16384$$

Es decir, que:

$$\log_4 16384 = \log_4 4^7 = 7$$

Además, si escribimos $4^7$ de la manera: $4^7 = 4\cdot 4\cdot 4\cdot 4\cdot 4\cdot 4\cdot 4$, por la propiedad anteriormente mencionada, referida al logaritmo de un producto, y generalizándola para varios factores, tenemos:

$$\log_4 4^7 = \log_4 \left(4\cdot 4\cdot 4\cdot 4\cdot 4\cdot 4\cdot 4\right) =$$

$$= \log_4 4 + \log_4 4 + \log_4 4 + \log_4 4 + \log_4 4 + \log_4 4 + \log_4 4 = 7\cdot \log_4 4 = 7\cdot 1 = 7$$

En consecuencia, según este criterio, también podemos escribir:

$$\log_2 4^7 = \log_2 \left(4\cdot 4\cdot 4\cdot 4\cdot 4\cdot 4\cdot 4\right) =$$

$$= \log_2 4 + \log_2 4 + \log_2 4 + \log_2 4 + \log_2 4 + \log_2 4 + \log_2 4 = 7\cdot \log_2 4 = 7\cdot 2 = 14$$

Resultado que ya conocíamos pues habíamos visto anteriormente que $4^7 = 2^{14}$, y por esta razón, también podríamos escribir:

$$\log_2 4^7 = \log_2 2^{14} = 14\cdot \log_2 2 = 14\cdot 1 = 14$$

De manera similar, puede analizarse a partir de la tabla que:

$$\log_3 81 = \log_3 3^4 = 4\cdot \log_3 3 = 4\cdot 1 = 4$$

Efectivamente $4$ es el exponente al que hay que elevar el número $3$ para obtener $81$, es decir, $4$ es el logaritmo de $81$ en base $3$.

Podríamos buscar más resultados similares ayudándonos de la tabla. Por ejemplo:

$$\log_5 390625 = \log_5 5^8 = 8\cdot \log_5 5 = 8\cdot 1 = 8$$

De los razonamientos anteriores deducimos dos propiedades, a saber:

- *El logaritmo de un número positivo, en la misma base, es igual a* $1$. Simbólicamente:

$$\log_b b = 1$$

- *El logaritmo de una potencia, en una base determinada, es igual al producto del exponente por el logaritmo de la base*. En lenguaje simbólico:

$$\log_b a^n = n\cdot \log_b a$$

Estos artículos pretenden hablar del contexto histórico y de las aplicaciones de los logaritmos, por eso no buscaremos más propiedades de los mismos, no sea que nos desviemos del objetivo principal.