1. Los vértices opuestos de un cuadrado son $A(1,9)$ y $C(11,3)$. Determina sus otros vértices, el perímetro y el área. (44)

## *Solución*

Los otros dos vértices han de estar situados sobre la mediatriz del segmento $AC$. Vamos a hallarla. Para ello tendremos en cuenta en primer lugar que $\overrightarrow{AC}=(10,-6)$ y que un vector perpendicular a éste es $\vec{n}=(3,5)$. Además, el punto medio de $A$ y $C$ es $M(6,6)$ (que será también el centro del cuadrado). Por tanto, la mediatriz de $AC$ es $\frac{x-6}{3}=\frac{y-6}{5}$, que en forma explícita es:

$5x-30=3y-18\Rightarrow 3y=5x-12\Rightarrow y=\frac{5}{3}x-4$. Un punto cualquiera de esta recta es de la forma $P\left(a,\frac{5}{3}a-4\right)$. Entonces la distancia de cualquiera de los otros vértices del cuadrado a su centro $M$ debe ser la misma, por ejemplo, que la del vértice $A$ a $M$:

$$\left|\overrightarrow{MP}\right|=\left|\overrightarrow{MA}\right|\Rightarrow\left|\left(a-6,\frac{5}{3}a-10\right)\right|=\left|(-5,3)\right|\Rightarrow\sqrt{(a-6)^2+\left(\frac{5}{3}a-10\right)^2}=\sqrt{(-5)^2+3^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2-12a+36+\frac{25}{9}a^2-\frac{100}{3}a+100=34\Rightarrow 9a^2-108a+324+25a^2-300a+900=306\Rightarrow$$

$\Rightarrow 34a^2-408a+918=0\Rightarrow a^2-12a+27=0$. El discriminante de esta última ecuación es $\Delta=(-12)^2-4\cdot1\cdot27=144-108=36$. Por tanto: $a=\frac{12\pm\sqrt{36}}{2\cdot1}=\frac{12\pm6}{2}=\begin{cases}a_1=9\\a_2=3\end{cases}$.

De este modo los otros dos vértices se obtienen sustituyendo en el punto $P$.

Si $a=9$, obtenemos $B\left(9,\frac{5}{3}\cdot9-4\right)\Rightarrow B(9,11)$. Y si $a=3$, obtenemos $D\left(3,\frac{5}{3}\cdot3-4\right)\Rightarrow D(3,1)$.

El perímetro del cuadrado es cuatro veces la longitud del lado:

$4\left|\overrightarrow{AB}\right|=4\left|(8,2)\right|=4\sqrt{64+4}=4\sqrt{68}=8\sqrt{17}$ u.

Y el área será igual al lado al cuadrado: $\left|\overrightarrow{AB}\right|^2=\left|(8,2)\right|^2=\sqrt{64+4}^2=68$ u². †

2. Calcula las ecuaciones de las mediatrices del triángulo de vértices $A(-4,-2)$, $B(4,-2)$ y $C(2,4)$. Halla el circuncentro.

### Solución

Recordemos que una mediatriz es una recta perpendicular a un lado que pasa por su punto medio.

El punto medio del lado $AB$ es $L(0,-2)$. El punto medio del lado $AC$ es $M(-1,1)$. Y el punto medio del lado $BC$ es $N(3,1)$.

Además $\overrightarrow{AB}=(8,0)$, $\overrightarrow{AC}=(6,6)$ y $\overrightarrow{BC}=(-2,6)$. Entonces un vector perpendicular a $\overrightarrow{AB}$ es $\vec{u}=(0,1)$, un vector perpendicular a $\overrightarrow{AC}$ es $\vec{v}=(-1,1)$ y un vector perpendicular a $\overrightarrow{BC}$ es $\vec{w}=(3,1)$.

Mediatriz correspondiente al lado $AB$: $\dfrac{x}{0}=\dfrac{y+2}{1}\Rightarrow x=0$.

Mediatriz correspondiente al lado $AC$: $\dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y-1}{1}\Rightarrow x+1=-y+1\Rightarrow x+y=0$.

Mediatriz correspondiente al lado $BC$: $\dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y-1}{1}\Rightarrow x-3=3y-3\Rightarrow x-3y=0$.

El circuncentro es el punto de corte de las mediatrices. Se obtiene resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de dos cualesquiera de ellas. En este caso es muy fácil ver que el ortocentro coincide con el origen de coordenadas: $O(0,0)$. †

3. El lado desigual de un triángulo isósceles $ABC$, tiene por extremos $A(1,-2)$ y $B(4,3)$. El vértice $C$ está en la recta $3x-y+8=0$. Halla las coordenadas de $C$ y el área del triángulo.

***Solución***

La ecuación explícita de la recta $3x-y+8=0$ es $y=3x+8$. Por tanto, un punto cualquiera de esta recta lo podemos escribir así: $C(a,3a+8)$. Puesto que el triángulo es isósceles y el lado desigual es el $AB$, los lados iguales deberán ser $AC$ y $BC$, es decir, se debe cumplir que $\left|\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|\Rightarrow\left|(a-1,3a+10)\right|=\left|(a-4,3a+5)\right|$.

O sea: $\sqrt{(a-1)^2+(3a+10)^2}=\sqrt{(a-4)^2+(3a+5)^2}\Rightarrow$

$$\Rightarrow a^2-2a+1+9a^2+60a+100=a^2-8a+16+9a^2+30a+25\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 58a+101=22a+41\Rightarrow 36a=-60\Rightarrow a=-\frac{60}{36}\Rightarrow a=-\frac{5}{3}.$$

De este modo, el vértice $C$ del triángulo es $C\left(-\frac{5}{3},3\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)+8\right)\Rightarrow C\left(-\frac{5}{3},3\right)$.

Para hallar el área del triángulo vamos a usar como base $b=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|(3,5)\right|=\sqrt{3^2+5^2}=\sqrt{34}$ u, y como altura $h$ la distancia del punto $C\left(-\frac{5}{3},3\right)$ a la recta que pasa por $A(1,-2)$ y por $B(4,3)$. La ecuación de esta recta es $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{5}\Rightarrow 5x-5=3y+6\Rightarrow 5x-3y-11=0$. Por tanto:

$$h=\frac{\left|5\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)+(-3)\cdot 3+(-11)\right|}{\sqrt{5^2+(-3)^2}}=\frac{\left|-\frac{25}{3}-9-11\right|}{\sqrt{25+9}}=\frac{\left|-\frac{85}{3}\right|}{\sqrt{34}}=\frac{85}{3\sqrt{34}}\text{ u.}$$

De este modo, el área o superficie $S$ del triángulo será:

$$S=\frac{b\cdot h}{2}=\frac{\sqrt{34}\cdot\frac{85}{3\sqrt{34}}}{2}=\frac{85}{6}\cong 14{,}17\text{ u}^2.$$ †

4. Un rombo $ABCD$ tiene un vértice en el eje de ordenadas, otros dos vértices opuestos son $B(-1,-1)$ y $D(-5,3)$. Halla las coordenadas de los vértices $A$ y $C$ y el área del rombo.

### *Solución*

El vértice $A$, al estar en el eje de ordenadas (que es la recta $x=0$), será de la forma $A(0,a)$. La distancia de este vértice a $B$ es la misma que a $D$. Es decir:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{AD}\right|\Rightarrow\left|(1,a+1)\right|=\left|(5,a-3)\right|\Rightarrow\sqrt{1^2+(a+1)^2}=\sqrt{5^2+(a-3)^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+a^2+2a+1=25+a^2-6a+9\Rightarrow 2a+2=-6a+34\Rightarrow 8a=32\Rightarrow a=4\,.$$

De aquí deducimos que el vértice $A$ es $A(4,0)$.

El punto medio de $B$ y $D$ es $M(-3,1)$. Por tanto, el vértice $C$, al que llamaremos $C(a,b)$ es el simétrico de $A(4,0)$ respecto de $M(-3,1)$: $(-3,1)=\left(\frac{a+0}{2},\frac{b+4}{2}\right)\Rightarrow\begin{cases}\frac{a}{2}=-3\Rightarrow a=-6\\ \frac{b+4}{2}=1\Rightarrow b+4=2\Rightarrow b=-2\end{cases}$.

Así pues, se tiene que $C(-6,-2)$.

Para hallar las diagonales del rombo hallamos la longitud de las diagonales, ya que el área o superficie $S$ de un rombo viene dada por el producto de la longitud de las diagonales dividido entre dos.

$$\left|\overrightarrow{AC}\right|=\left|(-6,-6)\right|=\sqrt{(-6)^2+(-6)^2}=\sqrt{36+36}=\sqrt{72}=6\sqrt{2}\,.$$

$$\left|\overrightarrow{BD}\right|=\left|(-4,4)\right|=\sqrt{(-4)^2+4^2}=\sqrt{16+16}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}\,.$$

Por tanto: $S=\frac{\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BD}\right|}{2}=\frac{6\sqrt{2}\cdot 4\sqrt{2}}{2}=24\,\mathrm{u}^2$. †

5. Las rectas $x+y-2=0$ y $9x-3y-4=0$ son dos alturas del triángulo $ABC$ de vértice $A(2,2)$. Halla las ecuaciones de los lados del triángulo.

### *Solución*

Como el vértice $A(2,2)$ no pertenece a ninguna de las dos alturas, quiere decir que los otros dos vértices están, uno en la altura $x+y-2=0$, y otro en la altura $9x-3y-4=0$. Supongamos que $B$ está en la altura $x+y-2=0$, que será la que corresponde al lado $AC$. Y supongamos que $C$ está en la altura $9x-3y-4=0$ que será la que corresponde al lado $AB$.

Entonces el lado $AC$ es perpendicular a la altura $x+y-2=0$, con lo que el lado $AC$ será de la forma $x-y+C=0$ (obsérvese que los vectores directores de ambas rectas son perpendiculares). Como el vértice $A(2,2)$ pertenece a este lado, tenemos: $2-2+C=0 \Rightarrow C=0$, con lo que el lado $AC$ es $x-y=0$.

De la misma forma, el lado $AB$ es perpendicular a la altura $9x-3y-4=0$, con lo que el lado $AB$ será de la forma $x+3y+C=0$ (obsérvese otra vez que los vectores directores de ambas rectas son perpendiculares). Como el vértice $A(2,2)$ pertenece también a este lado, tenemos: $2+3\cdot 2+C=0 \Rightarrow 2+6+C=0 \Rightarrow C=-8$, con lo que el lado $AB$ es $x+3y-8=0$.

El lado $AC$ y la altura correspondiente al otro lado, se cortan en un punto, que será el vértice $C$. Resolvamos entonces el sistema formado por ambas rectas:

$\begin{cases} x-y=0 \\ 9x-3y-4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x+3y=0 \\ 9x-3y-4=0 \end{cases} \Rightarrow 6x-4=0 \Rightarrow x=\dfrac{2}{3}$. Sustituyendo en la primera ecuación tenemos que $\dfrac{2}{3}-y=0 \Rightarrow y=\dfrac{2}{3}$. Entonces el vértice $C$ es $C\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3}\right)$.

El lado $AB$ y la altura correspondiente al otro lado se cortan en un punto, que será el vértice $B$. Resolvamos entonces el sistema formado por ambas rectas:

$\begin{cases} x+3y-8=0 \\ x+y-2=0 \end{cases} \Rightarrow 2y-6=0 \Rightarrow y=3$. Sustituyendo en la segunda ecuación: $x+3-2=0 \Rightarrow x=-1$. Entonces el vértice $B$ es $B(-1,3)$.

Finalmente, el lado $BC$ será, naturalmente, el que une los vértices $B$ y $C$.

Como $\overrightarrow{BC}=\left(\dfrac{2}{3}-(-1),\dfrac{2}{3}-3\right) \Rightarrow \overrightarrow{BC}=\left(\dfrac{5}{3},\dfrac{-7}{3}\right)$, podemos tomar como vector director del lado $BC$ el vector $\vec{u}=(5,-7)$, con lo que el lado $BC$ será: $\dfrac{x+1}{5}=\dfrac{y-3}{-7} \Rightarrow -7x-7=5y-15 \Rightarrow 7x+5y-8=0$.

**Nota**: en realidad, cualquier recta paralela a $7x+5y-8=0$ podría ser perfectamente el lado $BC$, es decir, cualquier recta de la forma $7x+5y+c=0$ (ver vínculo a desmos al final de este documento). †